

Tschechische Technische Universität Prag  
Fakultät für Maschinenbau

Dissertation

**Reduktion von Fahrzeugmodellen  
zur Echtzeitsimulation**

**Ing. Jakub Tobolář**

Transportmittel und -anlagen  
Fachbereich

Prof. Ing. Jan Kovanda, CSc.  
Betreuer



## Kurzfassung

Die vorliegende Arbeit befasst sich mit den Reduktionstechniken, die eine Computersimulation von Straßenfahrzeugen in Echtzeit ermöglichen. Die entwickelten, implementierten und untersuchten Reduktionsverfahren bauen hierzu auf einer Modellierung des Fahrzeugs als Mehrkörpersystem auf. Der Schwerpunkt liegt in der Nachbildung der Kinematik und der Elastokinematik der Radaufhängung eines Fahrzeugs. Bezüglich der Kinematik einer Radaufhängung werden zur Modellreduktion die algebraischen Zwangsbedingungen, die kinematisch geschlossene Schleifen beschreiben, aus den Bewegungsgleichungen des Gesamtfahrzeugs eliminiert. Zum Einsatz kommt entweder eine Polynominterpolation der Kinematik oder aber die getrennte Lösung der algebraischen Schleifenschlussbedingungen, durchgeführt jeweils für jedes einzelne betroffene Radaufhängungs-Subsystem. Die Elastokinematik wird hingegen vereinfacht als eine zusätzliche Veränderung der aktuellen Radstellung dargestellt, die sich unter der Wirkung der entsprechenden Kräfte ergibt. Die durchgängige Implementierung der hier beschriebenen Reduktionstechniken in dem multidisziplinären Simulationsprogramm SIMPACK und einige Simulationsergebnisse werden ebenfalls präsentiert.

## Anotace

Předkládaná disertační práce se zabývá metodami redukce modelu osobního vozidla pro potřeby simulací v reálném čase. V popředí stojí metody k zohlednění kinematiky a elastokinematiky závěsů kol, přičemž tyto metody musí být implementovatelné v multidisciplinárním simulačním programu, vycházejícím z teorie soustav mnoha těles. Při realizaci kinematiky je cílem eliminace algebraických rovnic, popisujících vazbové podmínky v kinematických smyčkách závěsu, z výsledných pohybových rovnic vozidla. Využity jsou interpolace kinematiky závěsu pomocí polynomů nebo lokální řešení algebraických rovnic, vztahující se k danému závěsu jako k nezávislému subsystému. Vazbové rovnice jsou v tomto případě formulovány buď v relativních nebo v přirozených souřadnicích; na řešení rovnic jsou aplikovány stabilizační techniky – Baumgartova stabilizace nebo metoda projekce. Elastokinematika je řešena zjednodušeně jako dodatečná změna polohy nosiče kola vlivem daných sil. Všechny odvozené metody jsou implementovány v programu SIMPACK, jejich ověření je provedeno na modelu nezávislého pětiprvkového závěsu kola a na modelu celého vozidla. Výsledky simulací jsou rovněž nedílnou součástí této práce.

## Danksagung

Ich möchte mich bei Herrn Prof. Jan Kovanda, CSc. dafür bedanken, dass er diese Arbeit initiiert und betreut hat und dass er mir auch mein Praktikum im Deutschen Zentrum für Luft- und Raumfahrt (DLR), wo diese Arbeit dann später entstanden ist, ermöglicht hat.

Eine herzliche Danksagung gehört ebenfalls Herrn Prof. Willi Kortüm, Ph.D. (DLR), der mir am Ende meines Praktikums anschließendes Arbeitsverhältnis im DLR angeboten hat und der ebenso diese Arbeit mitinitiiert hat, leider aber nicht mehr mitbetreuen konnte. Neben allen ehemaligen als auch jetzigen Kollegen aus DLR, die immer hilfsbereit wurden, muss ich mich dann insbesondere bei den Herren Andreas Heckmann, Dr. Gunter Schupp und Dr. Ondřej Vaculín bedanken, die mich hauptsächlich während Entstehen der Textversion durch ihre Bemerkungen und Korrekturen kräftig unterstützt haben.

Meiner Frau Irena und meinen Söhnen Adam und Marek danke ich dafür, dass sie für mich eine große seelische Unterstützung nicht nur während Entstehen dieser Arbeit wurden und sind.

# Inhaltsverzeichnis

<b>Symbole und Schreibweise</b>	<b>9</b>
<b>1 Einleitung</b>	<b>11</b>
<b>2 Stand der Technik</b>	<b>15</b>
2.1 Echtzeitsimulation von Fahrzeugen . . . . .	15
2.2 Bewegungsgleichungen . . . . .	18
2.3 Ersatzmodelle der Radaufhängung . . . . .	20
2.3.1 Polynominterpolation der Kinematik . . . . .	21
2.3.2 Explizite Kinematik des Radträgers . . . . .	22
2.3.3 Implizite Kinematik des Radträgers . . . . .	23
2.3.4 Subsystem Synthesis Method . . . . .	24
2.3.5 Berücksichtigung der Elastokinematik . . . . .	25
2.4 Verwendete Simulationsumgebung . . . . .	26
<b>3 Ziele der Arbeit</b>	<b>29</b>
<b>4 Lösungsansätze und Methoden</b>	<b>31</b>
4.1 Kinematik der Verbindungen . . . . .	31
4.2 Rekursive Kinematik . . . . .	33
4.3 Bewegungsgleichungen . . . . .	36
4.4 Mehrkörpermodell einer Radaufhängung . . . . .	38
4.4.1 Struktur und Kinematik einer Radaufhängung . . . . .	38
4.4.2 Charakteristische Gelenkpaare . . . . .	42
4.5 Makrogelenk . . . . .	45
4.5.1 Bewegungsgleichungen in unabhängigen Koordinaten . . . . .	45
4.5.2 Radaufhängung als Makrogelenk . . . . .	47
4.5.3 Lösung nichtlinearer Zwangsbedingungen . . . . .	49
4.6 Makrogelenk in natürlichen Koordinaten . . . . .	53
4.6.1 Theoretische Grundlagen natürlicher Koordinaten . . . . .	54
4.6.2 Allgemeine Radaufhängung . . . . .	56
4.6.3 Translatorische Bewegung des Radträgers . . . . .	60
4.6.4 Drehbewegung des Radträgers . . . . .	61
4.6.5 Federbein-Radaufhängung . . . . .	62
4.7 Kennfeldgelenk . . . . .	64
4.8 Vereinfachung der Elastokinematik . . . . .	66

4.8.1	Zentralisierte Elastizität . . . . .	66
4.8.2	Bewegungsgleichungen des Radträgers . . . . .	68
<b>5</b>	<b>Vergleichende Bewertung und Ergebnisse</b>	<b>71</b>
5.1	Numerische Integration . . . . .	71
5.2	Beispiel Raumlénker-Radaufhängung . . . . .	73
5.2.1	Modellbeschreibung . . . . .	73
5.2.2	Modellvarianten . . . . .	74
5.2.3	Simulationsszenarien . . . . .	75
5.2.4	Bewertung der Simulation . . . . .	76
5.3	Beispiel Gesamtfahrzeug . . . . .	80
5.3.1	Vordere Radaufhängung und ihre Modellvarianten . . . . .	81
5.3.2	Simulationsszenarien . . . . .	82
5.3.3	Bewertung der Simulation . . . . .	83
5.3.4	Zusammenfassung der Simulation . . . . .	85
<b>6</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>87</b>
<b>A</b>	<b>Relativkinematik</b>	<b>91</b>
<b>B</b>	<b>Drehbewegung mittels dreier Punkte</b>	<b>93</b>
<b>C</b>	<b>Parameter der Radaufhängung und Ergebnisse</b>	<b>97</b>
<b>D</b>	<b>Parameter des Fahrzeugmodells und Ergebnisse</b>	<b>101</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>105</b>

# Abbildungsverzeichnis

1.1	Entwicklungsszenario der Sicherheit im Automobil . . . . .	11
2.1	Multidisziplinäres CAE-Werkzeug . . . . .	17
2.2	Beispiel für das physikalische Modell eines Mehrkörpersystems . . . . .	18
2.3	Baumstrukturiertes und kinematisch geschlossenes Mehrkörpersystem . . . . .	20
2.4	Struktur des Mehrkörpermodells von einem Fahrzeug . . . . .	21
2.5	Struktur einer typischen Einzelradaufhängung . . . . .	22
2.6	Berechnungsablauf der Subsystem Synthesis Method . . . . .	25
2.7	Struktur von SIMPACK . . . . .	27
4.1	Rekursive Kinematik des Körpers $j$ . . . . .	32
4.2	Skizze und Topologie einer typischen Radaufhängung . . . . .	40
4.3	Ebenes Modell der Doppelquerlenker-Radaufhängung . . . . .	41
4.4	Charakteristische Gelenkpaare . . . . .	44
4.5	Zur automatischen Aufstellung der Zwangsbedingungen . . . . .	50
4.6	Beispiel eines ebenen Mechanismus . . . . .	54
4.7	Kinematische Skizze der Raumlener-Radaufhängung . . . . .	57
4.8	Übersicht der Einzelradaufhängungen . . . . .	59
4.9	Kinematische Skizze der Federbein-Radaufhängung . . . . .	63
4.10	Graphische Darstellung der bi-kubischen Spline-Funktion . . . . .	65
4.11	Zentralisierte Elastizität . . . . .	67
5.1	Einzelradaufhängung – Skizze . . . . .	73
5.2	Einzelradaufhängung – Periodisches Anregungssignal . . . . .	76
5.3	Einzelradaufhängung – Verhältnis der Fahrzeugschwingung zur Anregung . . . . .	77
5.4	Einzelradaufhängung – Verhältnis der Fahrzeugschwingung zur Anregung beim reduzierten Modell mit Ersatzmassen . . . . .	77
5.5	Einzelradaufhängung – Residuum der Bedingungen bei stabilisierter Lösung . . . . .	79
5.6	Fahrzeugmodell – Gesamtansicht . . . . .	81
5.7	Fahrzeugmodell – Struktur der Federbein-Radaufhängung . . . . .	81
5.8	Fahrzeugmodell – Lage des Fahrzeugs bei der Einfahrt in den Kreis . . . . .	83
5.9	Fahrzeugmodell – Abweichung der Fahrzeuglage vom Referenzmodell . . . . .	84
5.10	Fahrzeugmodell – FRF von Querschleunigung beim Sinuslenken . . . . .	85
5.11	Fahrzeugmodell – FRF von Giergeschwindigkeit beim Sinuslenken . . . . .	86
C.1	Einzelradaufhängung – Datenpunkte der Radaufhängung . . . . .	98
C.2	Einzelradaufhängung – Lage des Radmittelpunktes bei periodischer Anregung	100

D.1	Fahrzeugmodell – Fahrzeuggeschwindigkeit bei der Einfahrt in den Kreis .	101
D.2	Fahrzeugmodell – Lenkradwinkel, Querbefchleunigung und Giergeschwindigkeit beim Sinuslenken . . . . .	102
D.3	Fahrzeugmodell – Fahrzeuggeschwindigkeit beim Sinuslenken . . . . .	103



# Tabellenverzeichnis

5.1	Einzelradaufhängung – Modellvarianten der Radaufhängung . . . . .	75
5.2	Einzelradaufhängung – Berechnungszeiten der Integration . . . . .	78
5.3	Fahrzeugmodell – Übersicht der Modellvarianten . . . . .	82
5.4	Fahrzeugmodell – Berechnungszeiten der Integration . . . . .	84



# Symbole und Schreibweise

## Häufig verwendete Symbole

$\mathbf{A}_{ij}$	Drehmatrix für die Transformation vom Koordinatensystem $j$ ins Koordinatensystem $i$
$\mathbf{A}^i$	Drehmatrix für Elementardrehung um die $x$ -, $y$ - und $z$ -Achse, ( $i = x, y, z$ )
$\Phi^T$	Verteilungsmatrix der Zwangskräfte (Zwangsmatrix)
$\mathbf{M}_i$	Massenmatrix des Körpers $i$
$\mathbf{M}$	Generalisierte (verallgemeinerte) Massenmatrix
$\mathbf{h}$	Vektor der verallgemeinerten Kräfte und Momente (außer Zwangskräfte und -momente)
$\mathbf{h}^g$	Vektor der verallgemeinerten eingeprägten Kräfte
$\mathbf{h}^k$	Vektor der verallgemeinerte Coriolis- und Zentrifugalkräfte
$\mathbf{p}$	Vektor der $n_p$ verallgemeinerten Lagekoordinaten
$\mathbf{z}_a$	Vektor der verallgemeinerten abhängigen Lagekoordinaten
$\mathbf{z}_u$	Vektor der verallgemeinerten unabhängigen Lagekoordinaten (Minimalkoordinaten, Zustandskoordinaten)
$\phi$	Vektor der $n_\lambda$ geometrischen (holonomen) Zwangsbedingungen auf der Lageebene
$\lambda$	Vektor der $n_\lambda$ verallgemeinerten Zwangskräfte in den Gelenken (Lagrangesche Multiplikatoren)
$n_f$	Anzahl der Freiheitsgrade, $n_f = n_p - n_\lambda$
$n_g$	Anzahl der Gelenke im Mehrkörpersystem
$n_k$	Anzahl der Körper im Mehrkörpersystem
$\gamma$	Sturzwinkel
$\delta$	Lenkwinkel

## Schreibweise in Formeln

**Skalare Größen** sind in normaler Schriftstärke durchgeführt, z. B.  $x_i$ .

**Vektoren** werden durch fett gedruckte Kleinbuchstaben gekennzeichnet, z. B.  $\mathbf{r}_i$ ,  $\boldsymbol{\omega}_i$ .

**Rechteckige und quadratische Matrizen** werden mit fett gedruckten Großbuchstaben bezeichnet, z. B.  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{E}_n$ ,  $\mathbf{M}$ .



# Kapitel 1

## Einleitung

Die Entwicklung von elektronischen Fahrzeugsystemen, die auf Vermeidung möglicher Verkehrsunfälle ausgerichtet sind, zeichnet sich in den letzten Jahren durch eine stetig zunehmende Tendenz aus. Diese Systeme tragen zu der aktiven Sicherheit der Fahrzeuge bei. Da die wesentlichen Systeme passiver Sicherheit, die „lediglich“ die Folgen eines Unfalls auf die beteiligten Personen minimieren, bereits über das ganze Spektrum der PKW-Fahrzeugklassen hinweg verbreitet sind, findet deren Entwicklungspotential immer weniger Beachtung. Die Entwicklung von Systemen aktiver Sicherheit rückt hingegen dementsprechend stark in den Vordergrund, Abbildung 1.1.

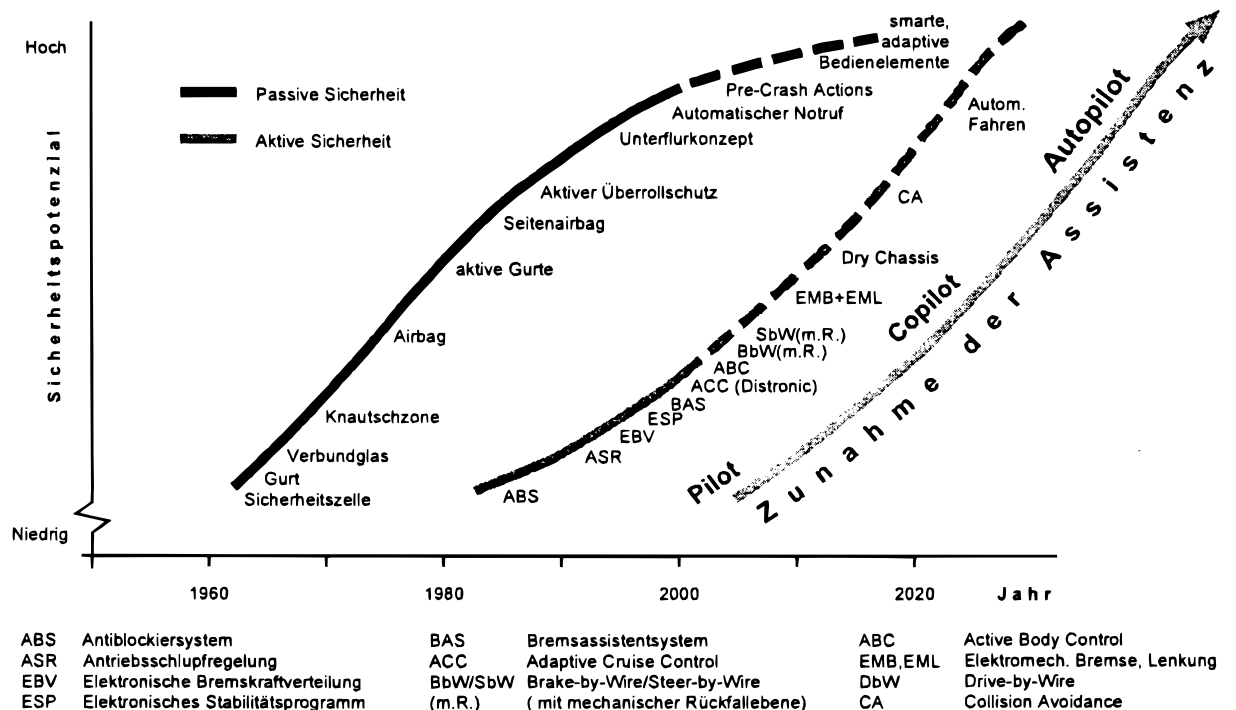


Abbildung 1.1: Entwicklungsszenario der Sicherheit im Automobil (Bild Rieth et. al. [48])

An die Entwicklung und Implementierung von Systemen aktiver Sicherheit werden hohe Anforderungen gestellt, weil man dabei stets die wesentlichen Aspekte Systemzuverlässigkeit, niedriger Energieverbrauch und Fahrsicherheit beim Ausfall des Systems in Betracht ziehen muss. Hierzu stellt die nicht nur in der Automobilindustrie verbreitete rechnerunterstützte Simulation ein leistungsstarkes Hilfsmittel zur Erfüllung vieler Anforderungen dar, das dem heutigen Fahrzeugkonstrukteur neben dem Experiment zur Verfügung steht. Neben solchen neuen Systemen aktiver Sicherheit werden mit Hilfe der Rechnersimulation bereits seit längerem natürlich auch Systeme passiver Sicherheit entworfen und optimiert.

Die nötige Zuverlässigkeit von Systemen aktiver Sicherheit erfordert zusätzlich sorgfältige Testphasen des Systems „on board“ und „off board“. Die Entwicklungs- und Testphasen können dabei in folgende Abschnitte unterteilt werden: Reine Rechnersimulation während der frühen Entwicklungsperiode, Hardware-in-the-Loop (HiL) Simulation („off board“) und Fahrversuche mit dem voll ausgestatteten Fahrzeug (alle Systeme „on board“). Die optimale Nutzung dieser Entwicklungswerkzeuge führt zu kürzeren Entwicklungszeiten und -kosten moderner Fahrzeuge und höherer Systemzuverlässigkeit.

Die HiL-Simulation spielt hier eine wichtige Rolle, da damit das Zusammenspiel der schon entwickelten Fahrzeugteilsysteme als Hardware und des noch nicht existierenden Gesamtfahrzeugs als Software in einem HiL-Prüfstand getestet werden kann. Um zuverlässige Testergebnisse zu erhalten, muss dabei das in einer HiL-Simulation verwendete Fahrzeugmodell die aktuellen Fahrzeugzustände in Echtzeit liefern. Im Hinblick auf die notwendige Echtzeitfähigkeit des Fahrzeugmodells baut dieses in den meisten Fällen auf einer Beschreibung als Mehrkörpersystem auf. Dabei spielen neben der Modellierung auch die Numerik, und hier im Wesentlichen die numerischen Verfahren zur Zeitintegration der Bewegungsgleichungen, sowie die Informatik eine wichtige Rolle. Während früher die Parallelisierung der Prozesse auf Rechnersystemen mit mehreren Prozessoren (Informatik) im Vordergrund stand, gewinnen heutzutage in Anbetracht der stetig steigenden Rechenleistung der Computer die Numerik und Modellierung an Bedeutung.

Weitere Einsatzgebiete der echtzeitfähigen Fahrzeugmodelle sind Fahrsimulatoren und virtuelle Produktentwicklung. Während die Fahrsimulatoren schon seit einigen Jahrzehnten insbesondere zur Untersuchung der Fahrzeug-Fahrer-Wechselwirkung eingesetzt werden, wird die virtuelle Produktentwicklung erst seit wenigen Jahren realisiert. Dabei werden aufwendige Experimente virtuell in multidisziplinären Simulationsprogrammen durchgeführt, um dadurch Entwicklungszeit und -kosten zu reduzieren.

Echtzeitfähige Mehrkörpermodelle von Fahrzeugen werden heutzutage überwiegend auf Basis generischer Fahrzeugmodelle von speziell hierfür entwickelten Computerprogrammen bereitgestellt. Bei eventuell erforderlichen, entsprechenden Erweiterungen, die beispielsweise eine Änderung der Struktur des Fahrzeugmodells erfordern, stößt man allerdings schnell an die Grenzen dieser Simulationsprogramme. Im Hinblick auf umfassende und variable, dennoch aber echtzeitfähige Fahrzeugmodelle befasst sich die vorliegende Arbeit mit speziellen Reduktionstechniken, die in einem multidisziplinären und für eine entsprechend umfangreiche Modellierung geeigneten Simulationsprogramm eingesetzt werden können. Dabei steht die Reduktion der (Sub-)Modelle der Radaufhängung im Vordergrund. Im Starrkörpermodell einer Radaufhängung treten typischerweise kinematisch geschlossene Schleifen auf, die mit zusätzlichen algebraischen Zwangsbedingungen beschrieben werden. Zum Erreichen möglichst kurzen Rechenzeiten ist es dann jedoch er-

forderlich, diese algebraischen Gleichungen wiederum aus den Bewegungsgleichungen des Gesamtfahrzeugs zu eliminieren; hierzu werden spezielle Methoden zur Modellreduktion angewendet. Eine Modellreduktion ist ebenfalls notwendig, wenn man die Elastokinetik der Radaufhängung (die sich auf Grund einer elastischen Lagerung der Lenker ergibt) berücksichtigen will. Dabei ist wieder ein wichtiges Ziel, eine effiziente Lösung der Bewegungsgleichungen zu ermöglichen.

Näher wird auf das Thema der Echtzeitsimulation der Fahrzeugmodelle sowie auf den aktuellen Stand der Technik mit dem Schwerpunkt Radaufhängungsmodelle im Kapitel 2 eingegangen. Dabei wird auch das verwendete Simulationsprogramm kurz dargestellt. Nach der Einführung in die Problematik werden in Kapitel 3 die Ziele dieser Arbeit konkret definiert. Basierend auf einem rekursiven Mehrkörperformalismus in Relativkoordinaten werden die existierenden und einige neue Ansätze zur Modellreduktion der Radaufhängungen in Kapitel 4 vorgestellt. Im Vordergrund stehen hierbei diejenige Methoden, mit denen Mehrkörpersysteme mit kinematisch geschlossenen Schleifen in einem multidisziplinären Simulationswerkzeug effizient behandelt werden können. Außer der Radaufhängungskinetik werden hier auch die Ansätze zur Reduktion der Elastokinetik eingeführt. Der Vergleich der vorgestellten Methoden wird in Kapitel 5 an Hand der Beispiele einer Raumenker-Radaufhängung und eines Gesamtfahrzeugs ausführlich diskutiert. Den Beitrag, den die Ergebnisse dieser Arbeit in der Praxis leisten können, und eine Zusammenfassung der Arbeit findet man schließlich in dem Kapitel 6.





# Kapitel 2

## Stand der Technik

In diesem Kapitel werden die Ansätze geschildert, die heutzutage für die Modellierung eines Fahrzeugs insbesondere hinsichtlich der speziellen Anforderungen der Echtzeitsimulation verwendet werden. Besondere Aufmerksamkeit wird dabei der in dieser Arbeit näher untersuchten Modellierung der Radaufhängung gewidmet.

### 2.1 Echtzeitsimulation von Fahrzeugen

Die Dynamik eines Fahrzeugs ist einer der wichtigen Aspekte, die sein Fahrverhalten, seine Fahrsicherheit und seinen Fahrkomfort bestimmen [35, 69]. Eine maßgebliche Rolle für die Fahrzeugdynamik spielt dabei das Fahrwerk und seine Abstimmung. Wegen der steigenden Anforderungen an das moderne Fahrzeug steigt dabei auch der Bedarf nach rechnerunterstützten Berechnungs- und Simulationsverfahren (engl.: Computer Aided Engineering – CAE), die Experimente und Messungen sinnvoll ergänzen können.

Zur Abstimmung der Fahrzeugdynamik haben sich Simulationsprogramme etabliert, die auf der Theorie der Mehrkörpersysteme (MKS) basieren, siehe z. B. [38, 57]. Während die Anforderungen an Simulationsgenauigkeit und möglichst kurze Rechenzeiten insbesondere in den letzten fünfzehn Jahren durch die neu- und weiterentwickelten Methoden der numerischen Integration sowie neue MKS-Formalismen zur Aufstellung der Bewegungsgleichungen erfüllt werden, sind zunehmend Fahrzeugmodelle erforderlich, die eine Simulation in Echtzeit garantieren, d. h. deren Rechenzeit kleiner oder höchstens gleich der Simulations- oder Systemzeit sein muss. Diese Eigenschaft wird kurz auch als Echtzeitfähigkeit bezeichnet.

„Traditionell“ werden echtzeitfähige Fahrzeugmodelle beispielsweise in Fahrsimulatoren zur Untersuchung der Fahrzeug-Fahrer-Wechselwirkung verwendet, um das Verhalten des realen Fahrzeugs nachzubilden [21]. Um eine Simulation in Echtzeit durchführen zu können, müssen die entsprechenden Methoden aus den Bereichen Mechanik, Numerik und Informatik in einem engen Zusammenhang gesetzt werden, wobei früher eine Echtzeitsimulation hauptsächlich durch die parallele Auswertung der Bewegungsgleichungen ermöglicht wurde [19, 54]. Ein neues Einsatzgebiet der echtzeitfähigen Fahrzeugmodelle sind seit einigen Jahren Fahrsimulatoren, die zur Ausbildung der Fahrer für innovative Lenkkonzepte (Schaltgetriebe, Lenkungssysteme) angesetzt werden [8].

Wegen der stetig steigenden Leistung und stetig sinkenden Preise herkömmlicher Rechner hat sich der Ansatz der „Low-Cost“ Simulatoren verbreitet [2, 31] – die Simulation

wird damit an gewöhnlichen PCs möglich. Anstatt der Parallelisierung der Rechenalgorithmen nehmen die MKS-Formalismen an Bedeutung zu, die die Bewegungsgleichungen von einem speziellen, generischen Fahrzeugmodell ableiten und eventuell vereinfachen. In den letzten fünfzehn Jahren sind auf diese Weise einige kommerzielle Simulationsprogramme entstanden, wie z. B. ve-DYNA [49], CarSim [55] oder LabCar (Software) [73]. Allgemeiner Nachteil dieser Vorgehensweise ist, dass eine Erweiterung des Fahrzeugmodells nur beschränkt möglich ist, da eine bestimmte Fahrzeugstruktur fest vorgegeben ist. Neben diesen speziell für die Echtzeitanwendung aufgebauten Programmen wurden und werden auch ursprünglich für die gewöhnliche offline-Analyse der Fahrzeugdynamik angewandte Rechenprogramme (für eine Übersicht siehe [38]) in dem Maße weiterentwickelt, dass sie ebenfalls in der Lage sind, echtzeitfähige Fahrzeugmodelle zu erzeugen (z. B. FADYS [17]). Die Besonderheit dieser Programme ist, dass sie die Bewegungsgleichungen auf der Grundlage entsprechender Benutzereingaben automatisiert erstellen - diese müssen also nicht mehr von Hand hergeleitet werden.

Hauptsächlich durch die neu entwickelten Systeme aktiver Sicherheit, siehe z. B. [25], wurde in den letzten Jahren der Bedarf an Hardware-in-the-Loop (HiL) Versuchen hervorgerufen. Die HiL-Simulation im Versuchslabor ermöglicht das Zusammenspiel der realen Komponente und der virtuellen Umgebung. Beispiele wären u. a. die Erprobung unterschiedlicher Regelungskonzepte am realen Steuergerät oder eine Kontrolle des Steuergeräts durch in Echtzeit aufgebrachte Anregungen. Insbesondere durch die Vernetzung und weitere Optimierung der Systeme aktiver Sicherheit (siehe [40] für Übersicht oder z. B. [48] für Global Chassis Control) nimmt die Bedeutung von HiL-Prüfstandsversuchen und damit gleichzeitig die Echtzeitsimulation der Fahrzeuge in Zukunft stetig weiter zu.

Ein künftiges Einsatzgebiet echtzeitfähiger Fahrzeugmodelle ist daneben noch die virtuelle Produktentwicklung [34, 59]. Die grundlegende Idee der virtuellen Produktentwicklung ist die Integration monodisziplinärer, auf spezielle Problemstellungen hin ausgerichteter Simulationsprogramme in ein übergeordnetes multidisziplinäres CAE-Werkzeug, das dem Fahrzeugkonstrukteur den Entwurf sowie intensive Analysen eines neu zu entwickelnden Fahrzeugs auf der Grundlage detaillierter und damit realistischer Simulationsmodelle ermöglicht. Die Analyse des Systemverhaltens unter gleichzeitiger Berücksichtigung der Mehrkörperdynamik, der Struktur- und Strömungsmechanik sowie der Elektronik ist damit schon lange vor der Entstehung des realen Fahrzeugprototyps möglich. Dadurch können dann sowohl die Entwicklungszeiten als auch -kosten in bedeutendem Maße reduziert werden. Eine interessante Zukunftsvision ist dabei, sämtliche reale Fahrzeugprototypen vollständig durch virtuelle Prototypen zu ersetzen, so dass dann die Fahrzeugproduktion ganz ohne Testphase von realen Fahrzeugen ermöglicht wird [14].

Da die dynamische Simulation ein wesentlicher Bestandteil der virtuellen Produktentwicklung ist, sollte ein auf der Mehrkörperdynamik basierendes Programm im Mittelpunkt eines multidisziplinären CAE-Werkzeugs stehen, das über effiziente bidirektionale Schnittstellen zu anderen CAE-Werkzeugen verfügt (Abbildung 2.1). Aus diesen Gründen wird für diese Arbeit das vom Deutschen Zentrum für Luft- und Raumfahrt entwickelte Simulationsprogramm SIMPACK [51] eingesetzt, das eine stabile und leistungsfähige Basis für die Auslegung und Bewertung von Fahrzeugen anbietet.

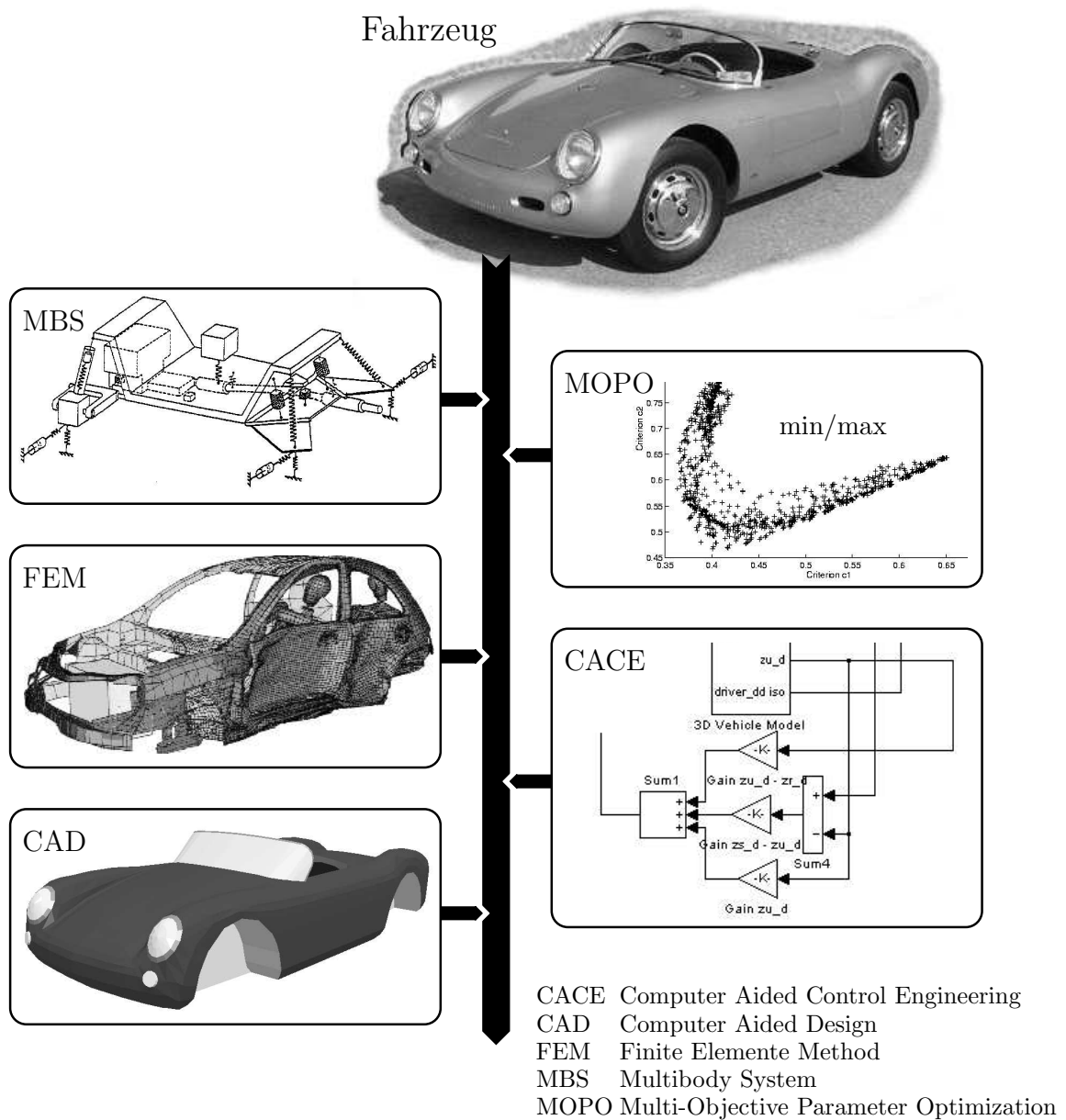


Abbildung 2.1: Multidisziplinäres CAE-Werkzeug

## 2.2 Bewegungsgleichungen

Um ein Ersatzmodell eines realen mechanischen Systems zu erzeugen, werden zunächst sämtliche Einzelemente durch ihre mechanischen Eigenschaften definiert; es entsteht ein mechanisches Ersatzmodell, Abbildung 2.2. Auf dieses Ersatzmodell werden dann die Prinzipie der Mechanik angewendet, um die Bewegungsgleichungen des Systems zu erhalten. Diese Bewegungsgleichungen stehen dann für die Analyse des untersuchten mechanischen Systems mit Hilfe der unterschiedlichsten Berechnungsverfahren bereit.

Der Zustand eines MKS wird eindeutig mit den Lage-  $\mathbf{p}$ , Geschwindigkeits-  $\dot{\mathbf{p}}$  und Beschleunigungs-  $\ddot{\mathbf{p}}$  koordinaten beschrieben, die als Unbekannte in den Bewegungsgleichungen auftreten. Diese Bewegungsgleichungen werden entweder als System gewöhnlicher Differentialgleichungen oder als System differentiell-algebraischer Gleichungen erzeugt. Entscheidend ist dabei der verwendete MKS-Formalismus, auf den das konkrete Simulationsprogramm aufbaut (siehe [57]). MKS-Formalismen, die die Topologie (Struktur) von MKS ausnutzen, stellen die Bewegungsgleichungen als gewöhnliche Differentialgleichungen bereit,

$$\mathbf{M}(\mathbf{p}, t) \ddot{\mathbf{p}} = \mathbf{h}(\mathbf{p}, \dot{\mathbf{p}}, t), \quad (2.1)$$

mit der symmetrischen Massenmatrix  $\mathbf{M}$ , die die Massen und Trägheitsmomente der Körper enthält, und dem Vektor  $\mathbf{h}(\mathbf{p}, \dot{\mathbf{p}}, t)$ , der sämtliche verallgemeinerten eingepprägten Kräfte und Momente als auch die verallgemeinerten Kreiselsterme zusammenfasst. Unter Einführung des Vektors  $\mathbf{x}^T = [\mathbf{p}^T \ \mathbf{y}^T]$  kann man mit  $\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{y}$  die Gleichung (2.1) formal

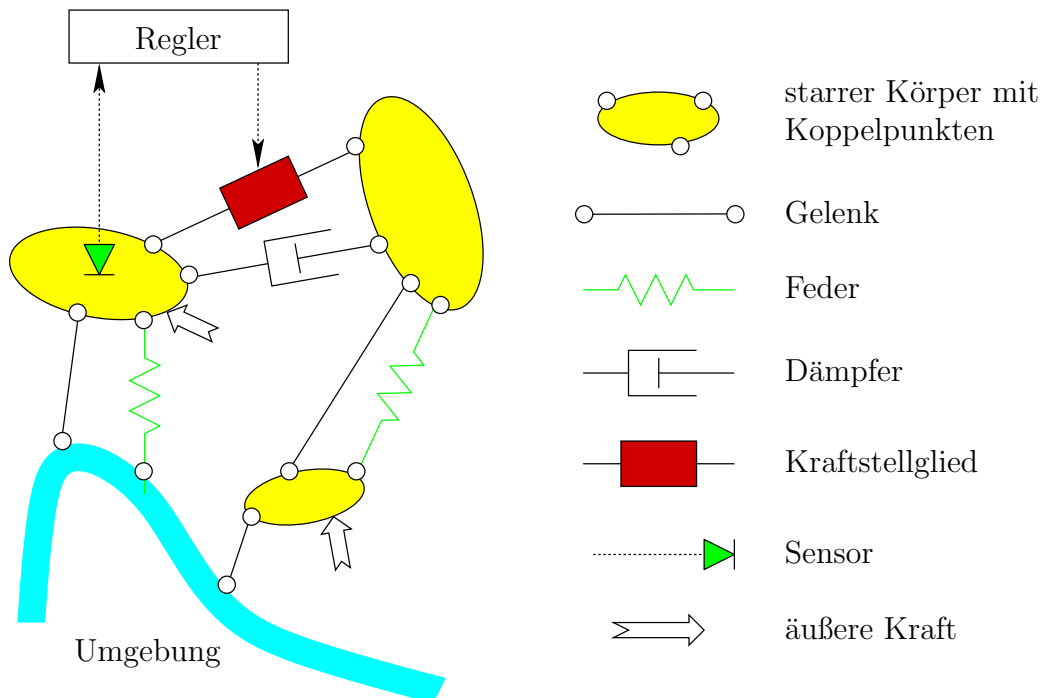


Abbildung 2.2: Beispiel für das physikalische Modell eines Mehrkörpersystems

zu den Differentialgleichungen erster Ordnung zusammenfassen:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{g}(\mathbf{x}, t) \quad (2.2)$$

mit

$$\mathbf{g} = \begin{bmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{p}, t) \mathbf{h}(\mathbf{p}, \mathbf{y}, t) \end{bmatrix}.$$

Dabei wird vorausgesetzt, dass  $\mathbf{M}$  eine reguläre Matrix ist, d. h. dass ihre Inversematrix  $\mathbf{M}^{-1}$  existiert. Da (2.2) die kleinstmögliche Anzahl der Bewegungsgleichungen darstellt, nennt man diese Beschreibung Minimal- oder Zustandsform. Dementsprechend stellt  $\mathbf{p}$  den Vektor der Minimal- oder Zustandskoordinaten dar, deren Anzahl derjenigen der Freiheitsgrade des MKS entspricht,  $n_p = n_f$ . Im Weiteren wird der Vektor der Minimalkoordinaten mit  $\mathbf{z}_u$  bezeichnet,  $\mathbf{z}_u := \mathbf{p}$ .

Dem entgegengesetzt treten im Falle der Deskriptorform der Bewegungsgleichungen,

$$\mathbf{M}(\mathbf{p}, t) \ddot{\mathbf{p}} = \mathbf{h}(\mathbf{p}, \dot{\mathbf{p}}, \boldsymbol{\lambda}, t) + \boldsymbol{\Phi}^T(\mathbf{p}, t) \boldsymbol{\lambda}, \quad (2.3a)$$

$$\mathbf{0} = \boldsymbol{\phi}(\mathbf{p}, t), \quad (2.3b)$$

im Lagevektor  $\mathbf{p}$  noch zusätzliche, d. h. redundante Koordinaten auf. Die Reaktionskräfte (der letzte Term in (2.3a)) setzen sich aus den verallgemeinerten Zwangskräften  $\boldsymbol{\lambda}$  und der Verteilungsmatrix  $\boldsymbol{\Phi} = \partial \boldsymbol{\phi} / \partial \mathbf{p}^T$  zusammen, die deren Richtung bestimmt. Mit den Reaktionskräften werden die mechanischen Bindungen der Körper in den Bewegungsgleichungen (2.3a) repräsentiert. Die mathematische Beschreibung dieser Bindungen stellen die algebraischen Gleichungen (2.3b) ( $n_\lambda$  Zwangs- oder Lagebedingungen) dar. Die  $n_\lambda$  Bindungen schränken die Bewegungsfreiheiten der Körper ein, so dass die resultierende Anzahl von Freiheitsgraden  $n_f = n_p - n_\lambda$  ist. Die Kopplung der Bewegungsgleichungen und der Zwangsbedingungen folgt über die Lagrangeschen Multiplikatoren  $\boldsymbol{\lambda}$ . Die Gleichungen (2.3) lassen sich als implizite differentiell-algebraische Gleichungen zusammenfassen:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) = \mathbf{0}. \quad (2.4)$$

Dabei ist jetzt der Vektor  $\mathbf{x}$  zusätzlich um die Lagrangeschen Multiplikatoren  $\boldsymbol{\lambda}$  erweitert,  $\mathbf{x}^T = [\mathbf{p}^T \ \mathbf{y}^T \ \boldsymbol{\lambda}^T]$

Wie bereits oben erwähnt, liefern MKS-Formalismen, die die Topologie eines MKS nutzen und auf relativen Koordinaten aufbauen (rekursive MKS-Formalismen, siehe z. B. [5, 10]), die Bewegungsgleichungen in der Zustandsform (2.1). Die entstehenden gewöhnlichen Differentialgleichungen lassen sich im Zeitbereich mit den bewährten Integrationsverfahren effizient lösen, siehe z. B. [18]. Für die Echtzeitsimulation sind dabei insbesondere die nichtiterativen (expliziten und semi-expliziten) Verfahren von Bedeutung. Die rekursiven MKS-Formalismen sind jedoch im Allgemeinen so aufgebaut, dass sie die Zustandsform (2.1) nur dann liefern, wenn ein kinematisch baumstrukturiertes MKS (siehe Abbildung 2.3) untersucht wird. Treten jedoch im System kinematische Schleifen auf, ergibt sich die Deskriptorform (2.3) mit den algebraischen Nebenbedingungen  $\mathbf{0} = \boldsymbol{\phi}(\mathbf{p}, t)$ , siehe z. B. [6, 51]. Die Transformation der Bewegungsgleichungen aus der Deskriptorform (2.3) in die Zustandsform (2.1) ist zwar immer durchführbar, da jedoch zunehmend zuverlässige und effiziente Integrationsverfahren zur direkten Lösung von

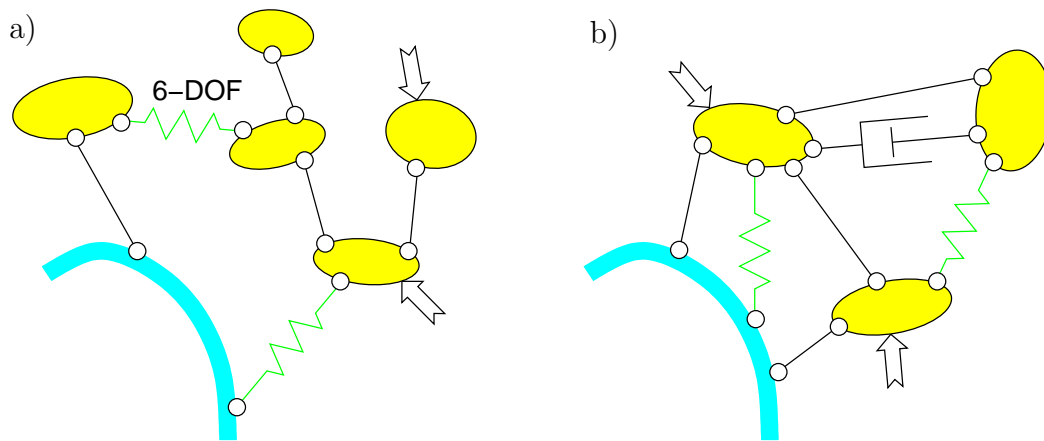


Abbildung 2.3: Baumstrukturiertes Mehrkörpersystem (a) und System mit kinematischer Schleife (b)

differentiell-algebraischen Gleichungen zur Verfügung stehen, tritt dieser Ansatz mehr und mehr in den Hintergrund.

In Fahrzeugmodellen weisen insbesondere die Radaufhängungen kinematische Schleifen auf. Zur Lösung des dadurch entstehenden differentiell-algebraischen Gleichungssystems werden heutzutage spezielle iterative Integrationsverfahren angesetzt. Um bei der Echtzeitsimulation dennoch die bewährten und effizienten numerischen Lösungsverfahren für die gewöhnlichen Differentialgleichungen (2.2) anwenden zu können, ist in der Literatur eine Reihe von Ansätzen zu finden, die sich mit der Modellierung von Radaufhängungen für echtzeitfähige Fahrzeugmodelle befassen. Obwohl die Ansätze in vielen Aspekten unterschiedlich sind, werden sie in den folgenden Abschnitten in möglichst ähnlicher Weise zusammengestellt.

In der vorliegenden Arbeit wird ein räumliches MKS-Modell eines Personenkraftwagens betrachtet, das aus den folgenden Baugruppen besteht (Abbildung 2.4): Neben dem Fahrzeugaufbau, der üblicherweise Karosserie, Insassen und Ladung umfasst, wären das die Radaufhängungen mit Rädern, der vordere und/oder hintere Fahrschemel, die Reifen, die Lenkung, der Antriebsstrang und die Bremsen. Während die Modellierungstiefe einzelner Baugruppen variieren kann, wird für die Simulation der Fahrdynamik zumindest ein Grundmodell benötigt, das aus dem Fahrzeugaufbau, den Radaufhängungen und den Reifen besteht.

## 2.3 Ersatzmodelle der Radaufhängung

Die Ersatzmodelle, die zur vereinfachten Nachbildung der Radaufhängung verwendet werden, beschränken sich oft auf deren rein kinematische Verhalten (Radaufhängungskinetik), d. h. alle Gelenke von Radaufhängung werden ideal, reibungs- und masselos betrachtet. In einigen Fällen der Echtzeitsimulation, wird auch die Elastizität der Lager in Betracht gezogen und damit die Elastokinematik der Radaufhängung berücksichtigt. Es werden zunächst Ersatzmodelle betrachtet, die allein die Kinematik der Radaufhängung

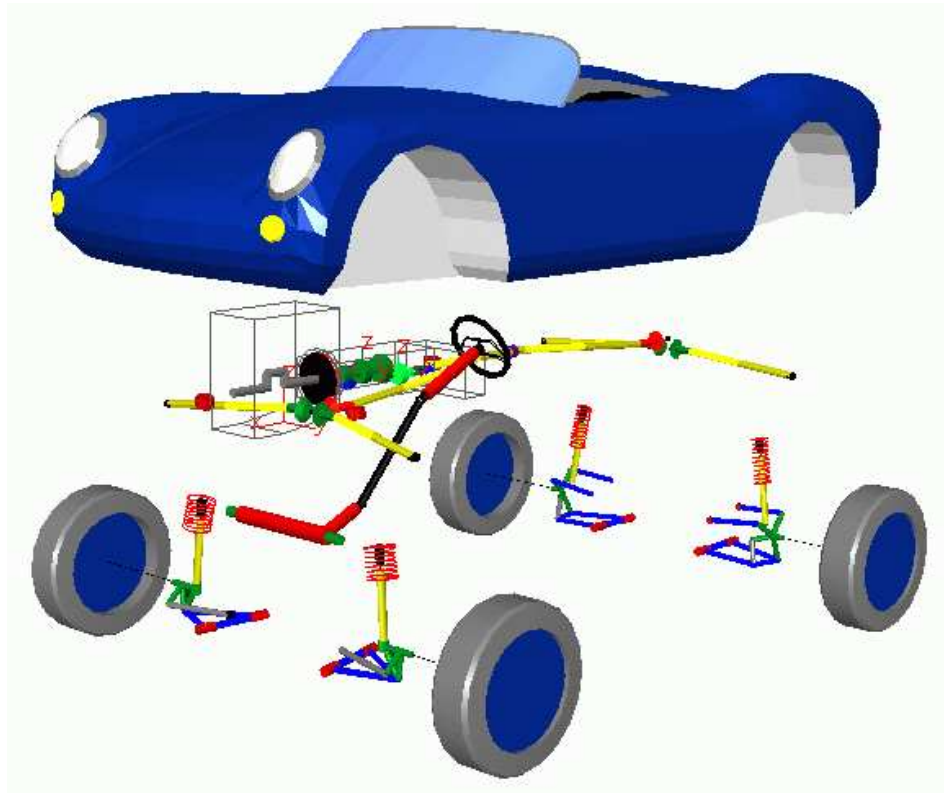


Abbildung 2.4: Struktur des Mehrkörpermodells von einem Fahrzeug

nachbilden.

Eine Einzelradaufhängung (siehe Abbildung 2.5) setzt sich aus dem Radträger (3), den Lenkern (2, 4, 5, 6) und den Feder- und Dämpferelementen (9, 10) zusammen. Durch Struktur und Auslegung der Radaufhängung wird bei Bewegung die Stellung des Rades (7) gegenüber dem Fahrzeugaufbau (1) gegeben. Bei lenkbaren Rädern wird die Radstellung zusätzlich durch die Lage von Zahnstange (8) beeinflusst. Den Körper 6 nennt man in dem Fall Spurstange.

### 2.3.1 Polynominterpolation der Kinematik

In den meisten Fällen geht man bei der Modellierung der Radaufhängung von der Annahme aus, dass das Radaufhängungsgestänge hauptsächlich für die Führung, also für die Kinematik des Radträgers von Bedeutung ist. Das dynamische Fahrverhalten des Fahrzeugs wird dagegen vom Gestänge wegen der geringen Massengrößen nur geringfügig beeinflusst, weshalb die Körper der Lenker bei Aufstellung der Bewegungsgleichungen vernachlässigt werden können.

Die Lage eines starren Körpers im Raum lässt sich nach [56] mit dem Ortsvektor  $\mathbf{r}$  und mit der Drehmatrix  $\mathbf{A}$  eindeutig festlegen, die üblicherweise drei kartesischen Koordinaten  $x, y, z$  und drei Drehwinkel  $\varphi_i, i = 1, 2, 3$  beinhalten. Diese sechs Längen- und

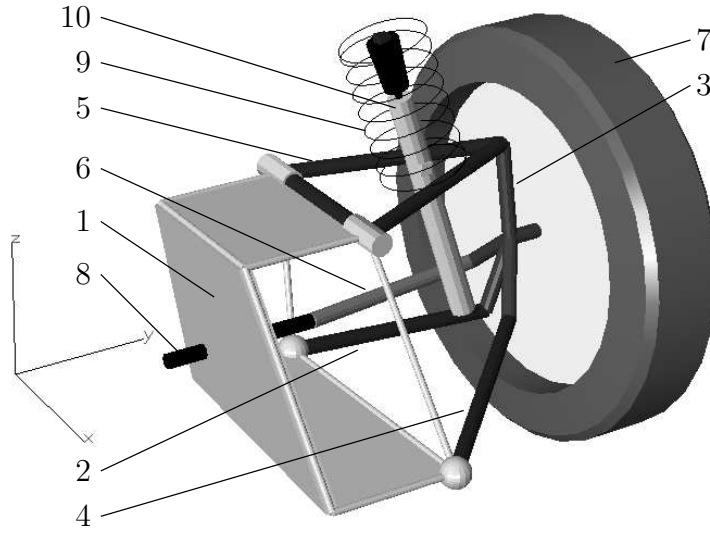


Abbildung 2.5: Struktur einer typischen Einzerradaufhängung

Drehkoordinaten hängen vom Lagevektor  $\mathbf{p}$  ab,

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{p}), \quad (2.5a)$$

$$\varphi_i = \varphi_i(\mathbf{p}), \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.5b)$$

Da diese analytische Darstellung in der Praxis unter Umständen nur schwer bestimmbar ist, wird sie durch einfache Polynomfunktionen ersetzt, die die Ortsvektoren  $\mathbf{r}$  und Drehmatrizen  $\mathbf{A}$  interpolieren. Da man bei der Untersuchung von Radaufhängungskinematik höchstens zwei Freiheitsgrade (Hub- und Lenkbewegung) betrachtet, werden hierzu höchstens zweidimensionale Polynomfunktionen benötigt. Während der Simulation werden dann nicht die exakten Gleichungen (2.5), sondern diese Polynomfunktionen ausgewertet. Die Stützpunkte der Näherungspolynome werden in der Praxis durch eine Bewegungsanalyse der Radaufhängung für einen bestimmten Arbeitsbereich gewonnen.

Diese sehr verbreitete Methode zur Darstellung der Übertragungsfunktion des Gestänges wurde von mehreren Autoren bearbeitet und veröffentlicht, z. B. [1, 27, 45, 64, 65]. Im Abschnitt 4.7 wird dieser Ansatz im Zusammenhang mit anderen Methoden dargestellt.

### 2.3.2 Explizite Kinematik des Radträgers

Bei manchen Typen von Radaufhängung ist es möglich, die Zwangsbedingungen (2.3b) unter Einführung der unabhängigen Koordinaten  $\mathbf{z}_u$  in die explizite Form

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}(\mathbf{z}_u) \quad (2.6)$$

überzuführen oder die Zwangsbedingungen in dieser expliziten Form direkt abzuleiten. Mit den Zustandskoordinaten  $\mathbf{z}_u$  werden also die unbekannten abhängigen Lagekoordinaten  $\mathbf{p}$  bestimmt und damit dann die Beschreibung der Radaufhängungskinematik



angegeben:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{z}_u), \quad (2.7a)$$

$$\varphi_i = \varphi_i(\mathbf{z}_u), \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.7b)$$

Diese Vorgehensweise wird z. B. von Rill [49] für Federbein-Radaufhängung und Schräglenkerachse vorgeschlagen. Dabei wird die Tatsache genutzt, dass sich die Lage der Spreizachse analytisch eindeutig beschreiben lässt, d. h. es werden (2.6) bzw. (2.7) analytisch abgeleitet. Unter dem Namen *Suspension Composite Joint* wird diese Methode auch von Lee [42] erörtert (leider ohne ausführlichere Beschreibung, die vielleicht koreanisch geschriebenen Berichten entnommen werden könnte). Choi [15, 16] dagegen erweitert die Palette um die Beschreibung der Doppelquerlenker-Radaufhängung. Zu den neueren Veröffentlichungen, die sich mit dieser Methode befassen, gehört [20].

### 2.3.3 Implizite Kinematik des Radträgers

Bei einer Radaufhängung mit kinematischen Schleifen ergeben sich die Bewegungsgleichungen in der Deskriptorform (2.3). Um die implizit formulierten holonomen Zwangsbedingungen

$$\phi(\mathbf{p}) = \mathbf{0} \quad (2.8)$$

aus den Bewegungsgleichungen zu eliminieren, werden die Zwangsbedingungen bereits bei der Lösung der Kinematik ausgewertet. Die Lage des Radträgers wird hierbei numerisch durch die Iterativlösung der Zwangsbedingungen bestimmt (Lageproblem), anschließend wird noch eine Geschwindigkeits- bzw. Beschleunigungsanalyse durch Auswertung der Ableitungen

$$\begin{aligned} \Phi_p \dot{\mathbf{p}} &= \mathbf{0}, \\ \Phi_p \ddot{\mathbf{p}} + \dot{\Phi}_p \dot{\mathbf{p}} &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

durchgeführt [49]. Die Jacobi- oder auch Verteilungsmatrix  $\Phi_p$  ergibt sich durch partielle Ableitung der Lagebedingungen  $\phi$  nach den Lagekoordinaten  $\mathbf{p}$ ,

$$\Phi_p = \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{p}^T}. \quad (2.9)$$

Die Bewegungsgleichungen des Fahrzeugmodells können dann in der Zustandsform (2.1) dargestellt werden, die Radaufhängung wird somit als ein reduziertes Subsystem betrachtet.

Rulka [52] hat diese Methode unter dem Namen *Makrogelenk* für die rekursive Formulierung der Bewegungsgleichungen abgeleitet. Die Zwangsbedingungen (2.8) werden dabei während der Auswertung des explizit definierten Radträgergelenks iteriert. Alternativ kann man die abhängigen Koordinaten  $\mathbf{p}$  mittels der numerischen Integration der explizit dargestellten Geschwindigkeitsbedingungen ermitteln,

$$\dot{\mathbf{p}} = \dot{\mathbf{p}}(\mathbf{z}_u, \dot{\mathbf{z}}_u, \mathbf{p}),$$

siehe [46]. Die Bewegungsgleichungen des MKS müssen dann allerdings um diese differentiellen Zusatzgleichungen erweitert werden. Die kinematische Übertragungsfunktion des Gestänges wird damit befriedigend berücksichtigt.

Näheres zu dieser Methode kann man in [53] finden. Im Abschnitt 4.5 wird diese Methode noch weiter analysiert.

### 2.3.4 Subsystem Synthesis Method

Ein weiterer Ansatz zur Modellierung einer Radaufhängung ist die so genannte Subsystem Synthesis Method (SSM), die von Kim abgeleitet wurde, siehe z. B. [28, 30]. Die Methode geht von der Annahme aus, dass sich das zu simulierende Fahrzeug auf den Bezugskörper Aufbau sowie mehrere Subsysteme wie Radaufhängungen, Antriebstrang, usw. aufteilen lässt. Die entstehenden Bewegungsgleichungen werden dann in einer modularen Modellierung so formuliert, dass sich die Gleichungen des Aufbaus und der geschlossenen Subsysteme separat behandeln lassen. Im Vordergrund stehen dabei die Bewegungsgleichungen des Fahrzeugaufbaus, die um die dynamischen Effekte erweitert werden, die durch Wechselwirkung mit den Subsystemen auftreten.

In der SSM müssen zuerst die effektive Massenmatrix und der effektive Kraftvektor jedes Subsystems berechnet werden. Diese verursachen die dynamischen Effekte, die auf Grund der physikalischen Koppelung zwischen den Subsystemen und dem Aufbau auftreten. Mit den  $6 \times 6$  effektiven Massenmatrizen  $\mathbf{M}_i$  und den  $6 \times 1$  effektiven Kraftvektoren  $\mathbf{h}_i$  aller  $n_{sub}$  Subsysteme erhält man die Bewegungsgleichungen des Aufbaus als gewöhnliche Differentialgleichungen in der folgenden Form (vgl. (2.1)):

$$\left( \mathbf{M}_B + \sum_{i=1}^{n_{sub}} \mathbf{M}_i \right) \ddot{\mathbf{p}}_B = \mathbf{h}_B + \sum_{i=1}^{n_{sub}} \mathbf{h}_i. \quad (2.10)$$

Dabei beschreibt  $\ddot{\mathbf{p}}_B$  allein die Beschleunigung des Aufbaus, weiter stehen  $\mathbf{M}_B$  für die Massenmatrix und  $\mathbf{h}_B$  für den Kraftvektor des Aufbaus. Mit der aus (2.10) bekannten Aufbaubeschleunigung  $\ddot{\mathbf{p}}_B$  werden dann die Bewegungsgleichungen der  $n_{sub}$  Subsysteme gelöst, die im Allgemeinen in der Deskriptorform (2.3) angegeben sind:

$$\mathbf{M}_{S_i} \ddot{\mathbf{p}}_{S_i} = \mathbf{h}_{S_i} + \Phi_{S_i}^T \lambda_{S_i} - \mathbf{M}_{BS_i}^T \ddot{\mathbf{p}}_B, \quad (2.11a)$$

$$\mathbf{0} = \phi_{S_i}(\mathbf{p}_{S_i}). \quad (2.11b)$$

mit  $i = 1, \dots, n_{sub}$ . In (2.11) ist  $\mathbf{M}_{S_i}$  die Massenmatrix und  $\mathbf{h}_{S_i}$  der Kraftvektor des  $i$ -ten Subsystems,  $\mathbf{M}_{BS_i}$  fasst die dynamischen Auswirkungen des Bezugskörpers auf das Subsystem zusammen. Wegen Gegenwirkung von Bezugskörper und Subsysteme spiegeln sich diese Matrizen und Vektore in  $\mathbf{M}_i$  und  $\mathbf{h}_i$  wider. Die Besetztheit und die Dimensionen der Matrizen und Vektoren von (2.11) ist von der verwendeten MKS-Formulierung abhängig [30].

Abbildung 2.6 zeigt den Berechnungsablauf der SSM. Mit vom Integrator berechneten Lage- und Geschwindigkeitskoordinaten werden im ersten Subsystemmodul (A) zunächst Matrizen  $\mathbf{M}_{S_i}$ ,  $\mathbf{M}_{BS_i}$ ,  $\mathbf{h}_{S_i}$  und  $\Phi_{S_i}$  und anschließend  $\mathbf{M}_i$  und  $\mathbf{h}_i$  ausgewertet. Danach werden die Bewegungsgleichungen des Aufbaus nach den Beschleunigungen  $\ddot{\mathbf{p}}_B$  aufgelöst. Zuletzt werden dann im zweiten Subsystemmodul (B) die Beschleunigungen und verallgemeinerten Zwangskräfte der Subsysteme gemäß Gleichung (2.11) berechnet.

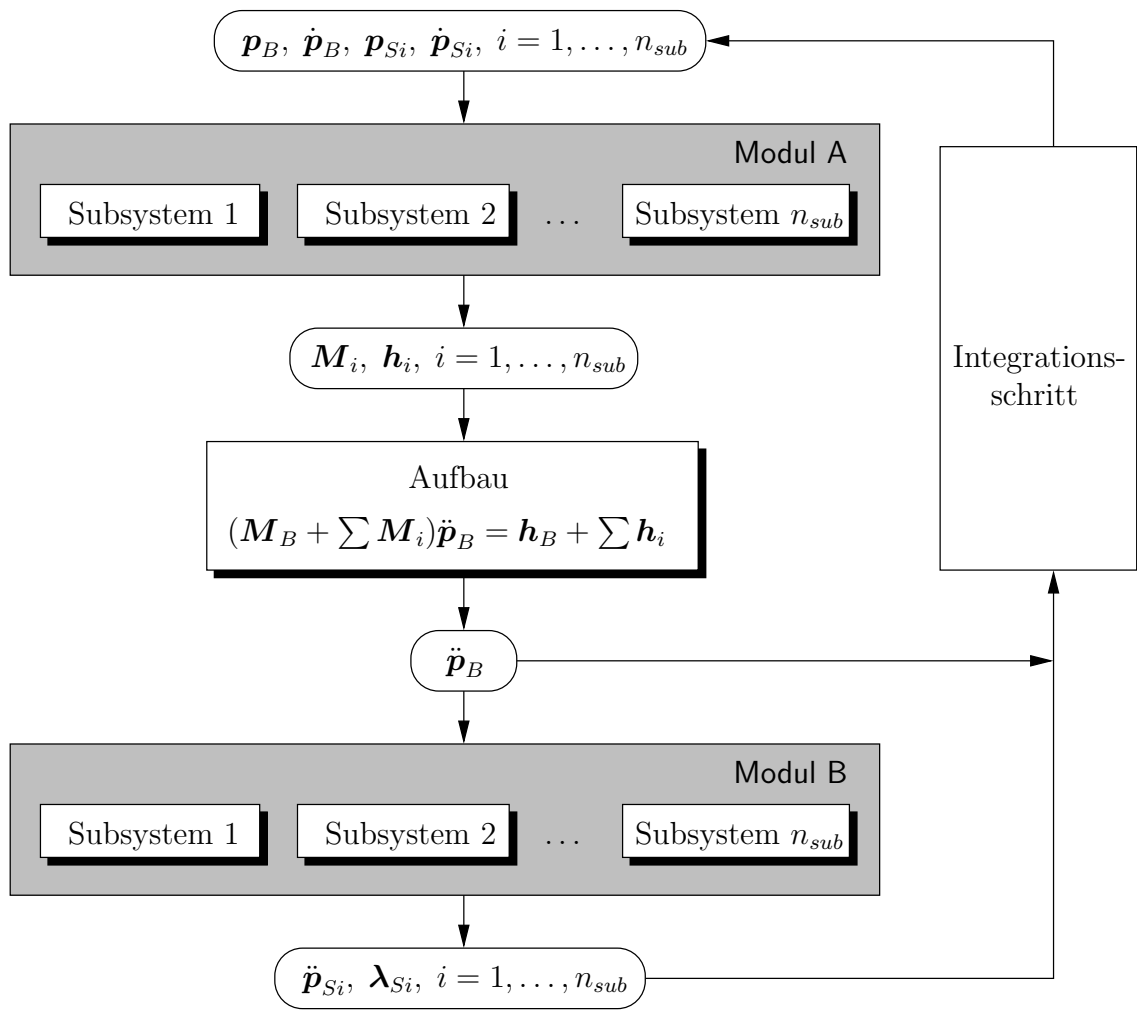


Abbildung 2.6: Berechnungsablauf der Subsystem Synthesis Method während eines Integrations-schrittes

Die Beschleunigungen  $\ddot{\mathbf{p}}_B$  und  $\ddot{\mathbf{p}}_{Si}$  werden dann dem Integrationsalgorithmus weitergegeben. Die SSM bietet damit naturgemäß einen modularen Aufbau des Modells an. Der größte Vorteil dieser Methode ist die Parallelisierbarkeit des Berechnungsprozesses, wenn das untersuchte MKS mehrere voneinander entkoppelte Subsysteme beinhaltet.

### 2.3.5 Berücksichtigung der Elastokinematik

Die Berücksichtigung der Elastokinematik eines Radaufhängungsmodells ist oftmals mit Problemen verbunden (hauptsächlich wegen der „Steifheit“ der Bewegungsgleichungen, siehe z. B. [18]), die eine Echtzeitsimulation verhindern. Deswegen wird bei der Echtzeitsimulation von Fahrzeugen oft nur die Kinematik der Radaufhängung betrachtet und auf die Elastokinematik verzichtet. Infolgedessen sind auch die Literaturquellen zur Abbildung der Elastokinematik in Echtzeitmodellen eher selten.

Die Ersatzmodelle zur Modellierung der Elastokinematik kann man auf mehrere Gruppen verteilen. Ein erster Modellierungsansatz entspricht im Grunde der Nachbildung der

Kinematik. Die Lenker der Radaufhängung werden dabei als masselose Kraftelemente mit sehr hoher Steifigkeit und Dämpfung simuliert [49, 60]. Weil nur die Nachgiebigkeit der Lenker betrachtet wird, weist die Radträgerbewegung nur sehr geringe Abweichungen von der reinen, starren, in den vorangehenden Abschnitten beschriebenen Kinematik auf. Dem Vorteil der einfachen Modellierung steht der Nachteil gegenüber, dass man zur Simulation spezielle Integrationsverfahren verwenden muss, die zur Behandlung steifer Differentialgleichungen geeignet sind, siehe z. B. [3, 18]. Diese Steifheit der Bewegungsgleichungen lässt sich hier physikalisch durch die hohen Eigenfrequenzen des Systems begründen. Außerdem ist eine komplizierte und unter Umständen problematische Abstimmung von Steifigkeiten und Dämpfungen der Kraftelemente notwendig [58].

Um das elastokinematische Verhalten realitätsnäher abzubilden, muss man die elastischen Lager zwischen dem Fahrzeugaufbau und der Radaufhängung berücksichtigen. Da dadurch jedoch sehr umfangreiche Modelle entstehen, die für die Echtzeitsimulation nicht mehr verwendbar sind, werden nur diejenigen Richtungen der Elastizität berücksichtigt, die die Elastokinematik am Meisten beeinflussen [49].

In [32] wird die Elastokinematik der Radaufhängung vereinfacht als eine zusätzliche Veränderung der aktuellen, aus der Kinematikberechnung bekannten Lage dargestellt, die linear von den wirkenden Kräften abhängt. Um bei der Echtzeitsimulation die Modelle möglichst einfach zu halten, wird allerdings nur die Spurwinkeländerung betrachtet, die Veränderung anderer Koordinaten wird dagegen vernachlässigt, siehe hierzu auch [1, 64].

In der vorliegenden Arbeit wird die Nachbildung der Elastokinematik in Abschnitt 4.8 behandelt.

## 2.4 Verwendete Simulationsumgebung

Wie bereits erwähnt, wird für die Implementierung der Methoden und für die Simulationen das Programmpaket SIMPACK [51] verwendet. SIMPACK wurde im Deutschen Zentrum für Luft- und Raumfahrt ursprünglich für die Simulation von Robotern und Fahrzeugen entwickelt. Durch ständige Weiterentwicklungen [36, 37, 39, 41] ist es zum heutigen multidisziplinären Software-Werkzeug geworden, das zur Simulation umfassender mechatronischer Fahrzeugsysteme eingesetzt wird.

Die Basis von SIMPACK bilden die Bewegungsgleichungen von Mehrkörpersystemen, die auf einer Beschreibung mittels relativer Koordinaten aufbauen [51]. Der effiziente  $O(N)$ -Formalismus [10, 50] liefert für baumstrukturierte MKS die Bewegungsgleichungen in der Zustandsform (2.2), was dazu beiträgt, dass der Rechenaufwand zur Auswertung der Gleichungen nur linear mit der Anzahl der Körper ansteigt. Für MKS mit kinematisch geschlossenen Schleifen wird zusätzlich noch die kleinstmögliche Anzahl an Zwangsbedingungen von „schleifenschließenden“ Gelenken berücksichtigt, es ergeben sich dann die Bewegungsgleichungen in der Deskriptorform (2.4), die im Vergleich zur Zustandsform (2.2) in der Regel nicht mehr so effektiv integriert werden können. Außer starren Körper bietet SIMPACK die Möglichkeit zur Einbeziehung elastischer Körper. Die Bewegungsgleichungen werden in einer numerischen oder wahlweise in einer symbolischen Form generiert.

Die grobe Struktur von SIMPACK ist in Abbildung 2.7 aufgezeigt. Dem Benutzer steht zur Modellierung eine Bibliothek von unterschiedlichsten Elementen wie z. B. Ge-

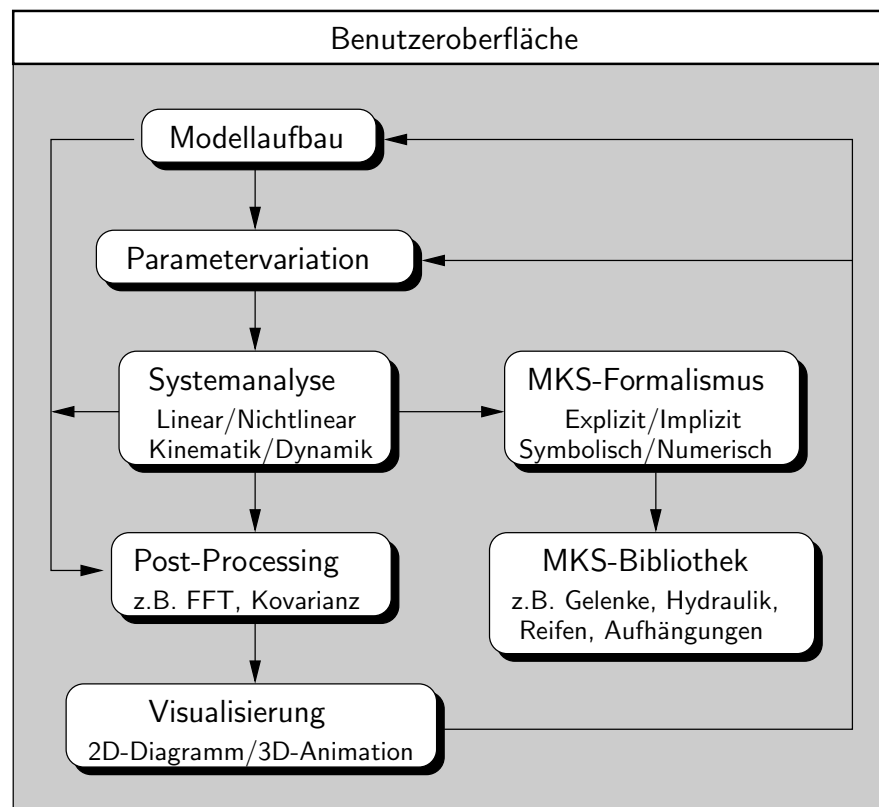


Abbildung 2.7: Struktur von SIMPACK

lenken, Kraftelementen oder Zeitanregungen zur Verfügung, die die Erstellung des Modells erheblich erleichtert. Dies schließt die vorgefertigte Beschreibung vieler Gelenktypen, von Getrieben, Kraftgesetzen hydraulischer Elemente, Reifenmodellen usw. ein. Außerdem kann man die Bibliothek leicht um frei programmierbare User-Routinen für benutzer-spezifische Elemente erweitern. Da SIMPACK ein „offenes“ Programm ist, kann man zur Lösung unterschiedlicher multidisziplinärer Aufgaben die mannigfaltig vorhandenen Schnittstellen zu anderen Simulationsprogrammen nutzen.

Zur Systemsynthese und -analyse bietet SIMPACK eine umfangreiche Palette von Verfahren an. Mit der statischen Analyse kann man z. B. die Lagegrößen oder nominellen Parameter der Kraftelemente für die Gleichgewichtslage bestimmen. Die kinematische Analyse beinhaltet den Systemzusammenbau oder die Berechnung konsistenter Anfangswerte für MKS mit geschlossenen Schleifen. Zur Lösung der Bewegungsgleichungen im Zeitbereich wird die dynamische Analyse durchgeführt, die sich wie die meisten anderen Analyseverfahren um eine Parametervariation oder Optimierungsaufgaben erweitern lässt. Die FFT-Analyse der Simulationsergebnisse als Beispiel einer nachgeordneten Bearbeitung der Simulationsergebnisse ergänzt die dynamische Analyse. Die Methoden der linearen Systemanalyse stehen dem Anwender ebenfalls zur Auswahl.



# Kapitel 3

## Ziele der Arbeit

Echtzeitfähige Mehrkörpermodelle von Fahrzeugen werden im großen Maße durch speziell für diese Zwecke entwickelte Programme erzeugt. Da jedoch diese Programme meist eine vorgegebene Struktur des Fahrzeugmodells voraussetzen (generisches Fahrzeugmodell), ist damit eine detaillierte Modellierung des Fahrzeugs auf Grund der darin fest implementierten Bewegungsgleichungen nicht möglich. Um die Grenzen solcher Programme zu überwinden, bieten multidisziplinäre Mehrkörperprogramme, mit denen die unterschiedlichsten Simulationsaufgaben gelöst werden können, einen Ausweg. Die mit diesen Programmen erstellten Fahrzeugmodelle sind aber unter Umständen für die Echtzeitsimulation unbrauchbar, u. a. auch weil sie die Bewegungsgleichungen nicht in einer geeigneten Form bereitstellen. Eine Modifizierung des Modells ist daher notwendig. Von besonderer Bedeutung ist dabei die Darstellung der Bewegungsgleichungen in Form von gewöhnlichen Differentialgleichungen, die man mit nichtiterativen numerischen Integrationsverfahren effektiv lösen kann.

Die von einem Mehrkörperprogramm erstellten Bewegungsgleichungen formen im Allgemeinen nur dann ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen, wenn das untersuchte Mehrkörpersystem eine Ketten- oder Baumstruktur aufweist, d. h. die Körper werden zueinander so verbunden, dass es nur einen eindeutigen Weg vom Inertialsystem zu jedem der Körper gibt. Wenn jedoch im Mehrkörpersystem kinematisch geschlossene Schleifen auftreten, formen die Bewegungsgleichungen ein differentiell-algebraisches Gleichungssystem, zu dessen Lösung iterative Integrationsverfahren eingesetzt werden. Da sich dabei jedoch die Anzahl der benötigten Auswertungen der Bewegungsgleichungen nicht vorab abschätzen lässt, sind diese Integrationsverfahren bzw. Bewegungsgleichungen in Form von differentiell-algebraischen Gleichungen nicht geeignet.

In Fahrzeugmodellen treten kinematisch geschlossene Schleifen vor allem in Radaufhängungen auf. Um dadurch hervorgerufene algebraische Gleichungen aus den Bewegungsgleichungen zu eliminieren, wird für Echtzeitsimulation insbesondere die Methode der Polynominterpolation der Radaufhängungskinematik verwendet. Während der Simulation werden hierbei in tabellierter Form abgelegte Daten ausgewertet. Diese Daten charakterisieren die kinematische Übertragungsfunktion der Radaufhängung mittels Kennfeldern. Die benötigten Daten werden in einem pre-processing Schritt erstellt. Bei dieser Methode können jedoch einerseits auf Grund der Interpolation der Daten Ungenauigkeiten auftreten, andererseits muss man die Daten nach jeder Parameter- oder Strukturänderung neu erstellen.

Eine Alternative für die Echtzeitsimulation der Fahrzeuge ist die Subsystem Synthesis Method. Hierbei werden die Radaufhängungen als voneinander unabhängige Subsysteme betrachtet und simuliert. Diese Methode erfordert jedoch einen speziellen MKS-Formalismus, so dass sie sich nicht in einem vorhandenen multidisziplinären Mehrkörperprogramm anwenden lässt.

Eine analytische Lösung der algebraischen Gleichungen ist für Echtzeitsimulation ebenfalls anwendbar, sie ist jedoch nur für bestimmte Radaufhängungstypen verfügbar. Außerdem muss man die analytischen Gleichungen für jeden Radaufhängungstyp erzeugen, wodurch der Wartungsaufwand und die Fehleranfälligkeit unangemessen hoch sind.

Hinsichtlich dieser Problemstellung werden für die vorliegende Arbeit folgende Ziele gesetzt:

1. Zusammenfassung der existierenden Methoden, die zur Abbildung der Kinematik von herkömmlichen Radaufhängungen in einem multidisziplinären Mehrkörperprogramm verwendet werden können und die von der Radaufhängungsstruktur unabhängig sind: Polynominterpolation und implizite Kinematik.
2. Weiterentwicklung der existierenden Methoden zur Reduktion der Radaufhängungsmodelle hinsichtlich deren Kinematik.
3. Zusammenfassung und Weiterentwicklung der Methoden zur Reduktion der Radaufhängungsmodelle hinsichtlich der Elastokinematik.
4. Implementierung der vorgeschlagenen Ansätze in einem multidisziplinären Simulationsprogramm, um möglichst objektive Ergebnisse für den Vergleich der Methoden zu bekommen.
5. Verifikation der neu entwickelten Methoden unter Verwendung der Simulationsbeispiele Raumlénker- und Federbein-Radaufhängung sowohl an einem virtuellen Prüfstand als auch in einem Gesamtfahrzeugmodell.



# Kapitel 4

## Lösungsansätze und Methoden

In diesem Kapitel werden die Methoden zur Reduktion der Radaufhängungsmodelle in einer gemeinsamen, auf der rekursiven Kinematik basierenden Form dargestellt. Diese soll es ermöglichen, die unterschiedlichen Methoden einheitlich zu betrachten um dann den anschließenden Vergleich auf einer gemeinsamen Basis durchführen zu können. Die Modellierung der Radaufhängungen ist dabei von besonderer Bedeutung, da hier sehr häufig kinematisch geschlossene Schleifen zu berücksichtigen sind. Die damit verbundenen kinematischen Zwangsbedingungen, die im Allgemeinen als stark nichtlineare algebraische Gleichungen definiert werden, führen dann zusammen mit den Bewegungsgleichungen zu einem differentiell-algebraischen Gleichungssystem.

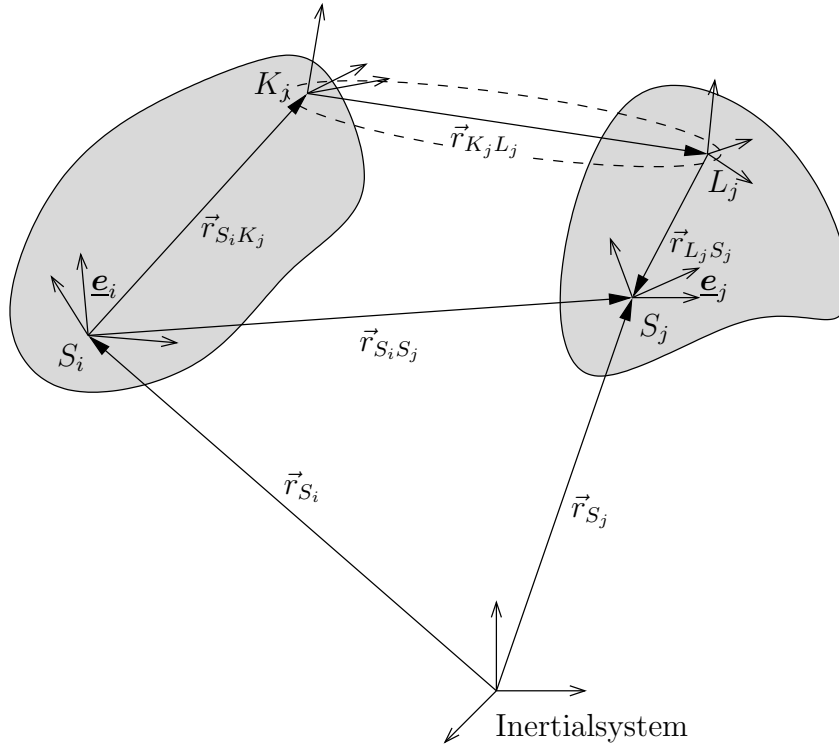
Ausgehend von der rekursiven Kinematik (Abschnitt 4.2) und den daraus resultierenden Bewegungsgleichungen (Abschnitt 4.3) werden auf ein detailliertes Radaufhängungsmodell unterschiedliche Methoden zur Modellreduktion angewandt. Ziel der Reduktion ist dabei, dass man Bewegungsgleichungen in Form differentiell-algebraischer Gleichungen vermeidet. Neben der Abbildung der Kinematik der Radaufhängung wird im Abschnitt 4.8 der Ansatz der zentralisierten Elastizität zur Berücksichtigung der Elastokinematik erläutert.

### 4.1 Kinematik der Verbindungen

Die Verbindung zweier benachbarter Körper wird in der Praxis auf verschiedene Weisen realisiert. Eine der Möglichkeiten ist eine Verbindung, die die Bewegungsfreiheit der Körper zueinander einschränkt, im Weiteren als *Gelenk* bezeichnet (im Gegensatz zu z. B. Kraftelementen, die zwar die Bewegung beeinflussen, diese aber nicht unmittelbar einschränken). Die mathematische Beschreibung der Gelenke ist sowohl implizit als auch explizit möglich. Die Kinematikbeziehungen eines Gelenks werden zunächst auf dessen zwei Verbindungspunkte  $K_j$  und  $L_j$  angewandt, die sich je auf einem der zu verbindenden Körper befinden, siehe Abbildung 4.1. Dabei wird in jedem der Verbindungspunkte ein körperfestes, kartesisches Koordinatensystem definiert.

Beschränkt zunächst auf skleronome Gelenke (d. h. die Beschreibung ist zeitinvariant) verwendet man zur Bestimmung der Gelenkkinematik im ersten Fall Bindungsgleichungen in impliziter Form (implizite Zwangsbedingungen, vgl. (2.8)),

$$\phi(\mathbf{p}_{K_j L_j}) = \mathbf{0}. \quad (4.1)$$

Abbildung 4.1: Rekursive Kinematik des Körpers  $j$ 

Der Vektor  $\mathbf{p}_{K_j L_j}$  fasst die sechs relativen Koordinaten (drei Längen- und drei Drehkoordinaten) des Gelenks zusammen, die zur Beschreibung der sechs Freiheitsgrade der zueinander freibeweglichen Körper erforderlich sind. Da in (4.1) nur die Lagekoordinaten  $\mathbf{p}_{K_j L_j}$  auftreten, handelt es sich um holonome Zwangsbedingungen. Die in der technischen Praxis eher selten auftretenden nichtholonomen Bindungen sind für die vorliegende Arbeit nicht von Bedeutung und werden daher nicht betrachtet.

Definiert man auf jedem der Körper  $i$  ein körperfestes kartesisches Koordinatensystem (Bezugssystem) mit dem Ursprung im Massenmittelpunkt  $S_i$ , dann lassen sich die Lage und die Orientierung dieses Bezugssystems in einem raumfesten Koordinatensystem (Inertialsystem) eindeutig durch einen Lagevektor  $\mathbf{p}_i$  bestimmen. Fasst man die Lagevektoren  $\mathbf{p}_i$  aller  $n_k$  Körper  $i$  zusammen, kann man für das gesamte MKS mit  $\mathbf{p}^T = [\mathbf{p}_1^T \ \mathbf{p}_2^T \ \dots \ \mathbf{p}_{n_k}^T]$  statt (4.1)

$$\phi(\mathbf{p}) = \mathbf{0} \quad (4.2)$$

schreiben. Neben den impliziten Lagebedingungen (4.2) sind auch die impliziten Zwangsbedingungen auf Geschwindigkeits- und Beschleunigungsebene von Bedeutung, die man durch zeitliche Ableitung von (4.2) erhält:

$$\dot{\phi} = \frac{d}{dt}\phi = \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{p}^T} \dot{\mathbf{p}} = \Phi_p \dot{\mathbf{p}} = \mathbf{0}, \quad (4.3)$$

$$\ddot{\phi} = \frac{d}{dt}\dot{\phi} = \Phi_p \ddot{\mathbf{p}} + \dot{\Phi}_p \dot{\mathbf{p}} = \mathbf{0}. \quad (4.4)$$

Dabei tritt die Verteilungsmatrix  $\Phi_p$  (siehe Gleichung (2.9)) auf.

Die zweite, explizite Darstellung der Gelenkkinematik macht sich die *freien Richtungen* des Gelenks zu Nutze, in denen eine relative Bewegung der benachbarten Körper möglich ist. Den freien translatorischen und rotatorischen Richtungen werden die voneinander unabhängigen Gelenkzustandsgrößen  $\mathbf{q}_j$  des Gelenks  $j$  zugeordnet. Die Gelenkkinematik wird dann durch diese Zustandsgrößen beschrieben. Für den Ortsvektor der zwei Verbindungspunkte  $K_j, L_j$  in Abbildung 4.1 gilt

$$\mathbf{r}_{g_j}(\mathbf{q}_j, t) = \mathbf{r}_{K_j L_j}(\mathbf{q}_j, t) \quad (4.5a)$$

und für die Drehmatrix, die die relative Orientierung vom Koordinatensystem im Punkt  $L_j$  gegenüber dem Koordinatensystem im Punkt  $K_j$  abbildet, gilt

$$\mathbf{A}_{g_j}(\mathbf{q}_j, t) = \mathbf{A}_{K_j L_j}(\mathbf{q}_j, t). \quad (4.5b)$$

Im Gegensatz zu den impliziten Zwangsbedingungen (4.2) bis (4.4) werden (4.5a) und (4.5b) zeitvariant betrachtet. Dies ist für diese Arbeit bedeutsam, weil die verwendeten Reduktionsmethoden auf der Gelenkkinematik in expliziter Form beruhen. Von der Zeit abhängige Gelenke nennt man rheonom.

Die relative Geschwindigkeit und Beschleunigung des Gelenks  $j$  ergeben sich durch zeitliche Ableitung, siehe z. B. [11, 56]:

$$\mathbf{v}_{g_j}(\mathbf{q}_j, \dot{\mathbf{q}}_j, t) = \dot{\mathbf{r}}_{g_j} = \frac{\partial \mathbf{r}_{g_j}}{\partial \mathbf{q}_j^T} \dot{\mathbf{q}}_j + \frac{\partial \mathbf{r}_{g_j}}{\partial t} = \mathbf{J}_{Tj}(\mathbf{q}_j) \dot{\mathbf{q}}_j + \bar{\mathbf{v}}_{g_j}(\mathbf{q}_j, t), \quad (4.5c)$$

$$\mathbf{a}_{g_j}(\mathbf{q}_j, \dot{\mathbf{q}}_j, \ddot{\mathbf{q}}_j, t) = \dot{\mathbf{v}}_{g_j} = \frac{\partial \mathbf{r}_{g_j}}{\partial \mathbf{q}_j^T} \ddot{\mathbf{q}}_j + \frac{\partial \mathbf{v}_{g_j}}{\partial \mathbf{q}_j^T} \dot{\mathbf{q}}_j + \frac{\partial \mathbf{v}_{g_j}}{\partial t} = \mathbf{J}_{Tj}(\mathbf{q}_j) \ddot{\mathbf{q}}_j + \bar{\mathbf{a}}_{g_j}(\mathbf{q}_j, \dot{\mathbf{q}}_j, t). \quad (4.5d)$$

Die Jacobimatrix der Translation  $\mathbf{J}_{Tj}$  ergibt sich als partielle Ableitung des Ortsvektors nach dem Zustandsvektor des Gelenks,  $\mathbf{J}_{Tj} = \partial \mathbf{r}_{K_j L_j} / \partial \mathbf{q}_j^T$ , zusätzlich treten noch der lokale Geschwindigkeitsvektor  $\bar{\mathbf{v}}_{g_j}$  und der lokale Beschleunigungsvektor  $\bar{\mathbf{a}}_{g_j}$  auf. Für die relative Winkelgeschwindigkeit und -beschleunigung gilt entsprechend (4.5c) und (4.5d):

$$\boldsymbol{\omega}_{g_j}(\mathbf{q}_j, \dot{\mathbf{q}}_j, t) = \boldsymbol{\omega}_{K_j L_j} = \mathbf{J}_{Rj}(\mathbf{q}_j) \dot{\mathbf{q}}_j + \bar{\boldsymbol{\omega}}_{g_j}(\mathbf{q}_j, t), \quad (4.5e)$$

$$\boldsymbol{\alpha}_{g_j}(\mathbf{q}_j, \dot{\mathbf{q}}_j, \ddot{\mathbf{q}}_j, t) = \dot{\boldsymbol{\omega}}_{g_j} = \mathbf{J}_{Rj}(\mathbf{q}_j) \ddot{\mathbf{q}}_j + \bar{\boldsymbol{\alpha}}_{g_j}(\mathbf{q}_j, \dot{\mathbf{q}}_j, t). \quad (4.5f)$$

Die Jacobimatrix der Rotation  $\mathbf{J}_{Rj}$  lässt sich formal ähnlich wie  $\mathbf{J}_{Tj}$  über die *infinitesimalen Drehungen* berechnen. Ein anschaulicherer und in der Praxis häufiger verwendeter Weg ist aber ihre Ableitung über die *Elementardrehungen* für eine ausgewählte Drehreihenfolge (z. B. Kardan- oder Eulerwinkel, siehe dazu auch [56, 63]). Daneben sind  $\bar{\boldsymbol{\omega}}_{g_j}$  der lokale Drehgeschwindigkeitsvektor und  $\bar{\boldsymbol{\alpha}}_{g_j}$  der lokale Drehbeschleunigungsvektor.

## 4.2 Rekursive Kinematik des Mehrkörpersystems

Für die Aufstellung der Bewegungsgleichungen wird in dieser Arbeit eine rekursive Vorgehensweise verwendet. Die rekursive Kinematik des starren Körpers sei hier nur kurz

zusammengefasst, eine ausführliche Beschreibung ist z. B. in [5] und [6] zu finden, weitere Literaturquellen zu diesem Thema sind z. B. [10, 51]. Der Einfachheit halber sei im Weiteren vorausgesetzt, dass das MKS aus lediglich einziger Kette mit  $n_k$  Körpern besteht.

Die Bewegung des starren Körpers wird durch die absoluten Koordinaten des Inertialsystems beschrieben. Wenn man die Baumstruktur des Systems (Topologie) ausnutzt, kann man die Bewegung des Körpers  $j$  über die Bewegung des Körpers  $i$  und die Relativbewegung des Körpers  $j$  bezüglich Körper  $i$  bestimmen, siehe Abbildung 4.1. Der Körper  $i$  ist Bezugskörper des Körpers  $j$  ( $j = i + 1$ ), wobei die Körper, die eine kinematische Kette bilden, vom Inertialsystem aus nummeriert werden.

Die Lage des starren Körpers  $j$  im Raum wird durch sein Bezugssystem mit dem Ursprung im Massenmittelpunkt  $S_j$  eindeutig beschrieben, Abbildung 4.1. Dieses Bezugssystem wird im Inertialsystem durch den Ortsvektor  $\mathbf{r}_{S_j}$ , die Geschwindigkeit  $\mathbf{v}_{S_j}$ , die Beschleunigung  $\mathbf{a}_{S_j}$ , die Drehmatrix  $\mathbf{A}_{S_j}$ , die Drehgeschwindigkeit  $\boldsymbol{\omega}_{S_j}$ , und die Drehbeschleunigung  $\boldsymbol{\alpha}_{S_j}$  festgelegt, wobei der entsprechende erste Index  $I$  im Falle eines Vektors oder einer Drehmatrix bezüglich des Inertialsystems weggelassen ist (also z. B.  $\boldsymbol{\omega}_{S_j} \equiv \boldsymbol{\omega}_{IS_j}$ ). Unter Verwendung der Relativkinematik ( $\underline{\mathbf{e}}_i \rightarrow \underline{\mathbf{e}}_j$ ) ergibt sich für diese Größen:

$$\mathbf{r}_{S_j} = \mathbf{r}_{S_i} + \mathbf{r}_{S_i S_j}, \quad (4.6a)$$

$$\mathbf{v}_{S_j} = \mathbf{v}_{S_i} + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{S_i} \mathbf{r}_{S_i S_j} + {}^{S_i^*} \mathbf{r}_{S_i S_j}, \quad (4.6b)$$

$$\mathbf{a}_{S_j} = \mathbf{a}_{S_i} + \tilde{\boldsymbol{\alpha}}_{S_i} \mathbf{r}_{S_i S_j} + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{S_i} \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{S_i} \mathbf{r}_{S_i S_j} + 2\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{S_i} {}^{S_i^*} \mathbf{r}_{S_i S_j} + {}^{S_i^{**}} \mathbf{r}_{S_i S_j}, \quad (4.6c)$$

$$\mathbf{A}_{S_j} = \mathbf{A}_{S_i} \mathbf{A}_{S_i S_j}, \quad (4.6d)$$

$$\boldsymbol{\omega}_{S_j} = \boldsymbol{\omega}_{S_i} + \boldsymbol{\omega}_{S_i S_j}, \quad (4.6e)$$

$$\boldsymbol{\alpha}_{S_j} = \boldsymbol{\alpha}_{S_i} + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{S_i} \boldsymbol{\omega}_{S_i S_j} + {}^{S_i^*} \boldsymbol{\omega}_{S_i S_j}. \quad (4.6f)$$

Dabei bedeutet  $({}^{S_i^*} \mathbf{x})$  die zeitliche Ableitung des Vektors  $\mathbf{x}$  im Koordinatensystem  $S_i$ . Der Operator  $(\sim)$  stellt die schiefsymmetrische Matrix des entsprechenden Vektors dar,

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \longrightarrow \tilde{\boldsymbol{\omega}} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix}.$$

Die Relativbewegung  $S_i S_j$  entwickelt man dabei über die Gelenkinematik nach der Regel

$$\overline{S_i S_j} = \overline{S_i K_j} + \overline{K_j L_j} + \overline{L_j S_j},$$

wobei  $K_j$  den gelenkäußeren und  $L_j$  den gelenkinneren Verbindungspunkt des Gelenks  $j$  darstellt. Im Anhang A wird die Relativkinematik ausführlicher dargestellt, an dieser Stelle seien nur die resultierenden Gleichungen (A.3) für die körperfesten Verbindungs-

punkte  $K_j$  und  $L_j$  im Inertialsystem angegeben:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{S_i S_j} &= \mathbf{r}_{S_i K_j} + \mathbf{r}_{K_j L_j} + \mathbf{r}_{L_j S_j} = \mathbf{A}_{S_i} ({}_i \mathbf{r}_{S_i K_j} + \mathbf{A}_{S_i K_j} \mathbf{r}_{g_j} + {}_{S_i} \mathbf{r}_{L_j S_j}) = \\ &= \mathbf{A}_{S_i} {}_{S_i} \mathbf{r}_{S_i S_j}, \end{aligned} \quad (4.7a)$$

$${}^{S_i} \dot{\mathbf{r}}_{S_i S_j} = \mathbf{A}_{S_i} {}_{S_i} \dot{\mathbf{r}}_{S_i S_j} = \mathbf{A}_{S_i} (\mathbf{A}_{S_i K_j} \mathbf{v}_{g_j} + \mathbf{A}_{S_i K_j} \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{g_j} {}_{S_i} \mathbf{r}_{L_j S_j}), \quad (4.7b)$$

$$\begin{aligned} {}^{S_i} \ddot{\mathbf{r}}_{S_i S_j} &= \mathbf{A}_{S_i} {}_{S_i} \ddot{\mathbf{r}}_{S_i S_j} = \\ &= \mathbf{A}_{S_i} (\mathbf{A}_{S_i K_j} \mathbf{a}_{g_j} + \mathbf{A}_{S_i K_j} \tilde{\boldsymbol{\alpha}}_{g_j} {}_{S_i} \mathbf{r}_{L_j S_j} + \mathbf{A}_{S_i K_j} \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{g_j} (\mathbf{A}_{S_i K_j} \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{g_j} {}_{S_i} \mathbf{r}_{L_j S_j})), \end{aligned} \quad (4.7c)$$

$$\mathbf{A}_{S_i S_j} = \mathbf{A}_{S_i K_j} \mathbf{A}_{g_j} \mathbf{A}_{L_j S_j}, \quad (4.7d)$$

$$\boldsymbol{\omega}_{S_i S_j} = \mathbf{A}_{S_i} \mathbf{A}_{S_i K_j} \boldsymbol{\omega}_{g_j}, \quad (4.7e)$$

$${}^{S_i} \dot{\boldsymbol{\omega}}_{S_i S_j} = \mathbf{A}_{S_i} {}_{S_i} \dot{\boldsymbol{\omega}}_{S_i S_j} = \mathbf{A}_{S_i} \mathbf{A}_{S_i K_j} \boldsymbol{\alpha}_{g_j}. \quad (4.7f)$$

Der Vektor  ${}_{S_i} \mathbf{r}_{L_j S_j}$  ist der im System  $L_j$  konstante Ortsvektor  ${}_{L_j} \mathbf{r}_{L_j S_j}$ , der nach der Transformation  ${}_{S_i} \mathbf{r}_{L_j S_j} = \mathbf{A}_{S_i K_j} \mathbf{A}_{g_j} {}_{L_j} \mathbf{r}_{L_j S_j}$  im System  $S_i$  gegeben wird (für  $\mathbf{A}_{g_j}$  gilt Gleichung (4.5b)).

Jeder Körper  $j$  verfügt über nur einen gelenkinneren Verbindungspunkt  $L_j$ , kann aber beliebig viele gelenkäußere Verbindungspunkte  $K_{j+l}$  haben. Jede zum gelenkinneren Punkt  $L_j$  gehörende Verbindung wird durch die Gleichungen (4.5) gegeben und *explizites Gelenk des Körpers  $j$*  genannt. Die zugehörigen verallgemeinerten Gelenkkoordinaten

$$\mathbf{q}_j = [q_{j,1} \ q_{j,2} \ \dots \ q_{j,n_{fj}}]^T,$$

mit denen man die Kinematik des expliziten Gelenks  $j$  beschreibt, repräsentieren die  $n_{fj}$  Freiheitsgrade des Gelenks.

Setzt man die gelenkspezifische Kinematik (4.5) in die Relativkinematik (4.7) und das Ergebnis in die Gleichungen (4.6) ein, ergibt sich eine rekursive Vorschrift zur Berechnung der absoluten Beschleunigungen aller Körper  $j$  einer kinematischen Kette eines MKS:

$$\mathbf{a}_j = \mathbf{C}_j \mathbf{a}_i + \bar{\mathbf{J}}_j \ddot{\mathbf{q}}_j + \bar{\mathbf{a}}_j \quad \text{mit} \quad \mathbf{a}_j^T = [\mathbf{a}_{S_j}^T \ \boldsymbol{\alpha}_{S_j}^T], \quad (4.8)$$

siehe [51]. Die absolute Lage  $\mathbf{r}_j$  und Geschwindigkeit  $\mathbf{v}_j$  ergeben sich in entsprechender Weise.

Durch sukzessives Einsetzen der Beschleunigungen  $\mathbf{a}_i$ ,  $i = 0, \dots, n_k - 1$ ,  $j = i + 1$ , in (4.8) ergibt sich für einzelne Beschleunigungen  $\mathbf{a}_j = \mathbf{J}_j \ddot{\mathbf{q}} + \bar{\mathbf{a}}_j$  bzw. zusammengefasst für alle Bezugssysteme ( $j = 1, \dots, n_k$ )

$$\mathbf{a} = \mathbf{J} \ddot{\mathbf{q}} + \bar{\mathbf{a}}. \quad (4.9)$$

Dabei steht  $\mathbf{J}$  für Gesamtjacobimatrix (auch globale Jacobimatrix nach [11]) und  $\bar{\mathbf{a}}$  für Gesamtvektor der lokalen Beschleunigungen. In dem Zustandsvektor  $\mathbf{q}$  werden die  $n_q$  Zustandskoordinaten aller  $n_g$  expliziten Gelenke  $j$  des Mehrkörpersystems,  $j = 1, \dots, n_g$ ,  $n_g = n_k$ , zusammengefasst,

$$\mathbf{q} = [\mathbf{q}_1^T \ \mathbf{q}_2^T \ \dots \ \mathbf{q}_{n_g}^T]^T = [q_{1,1} \ q_{1,2} \ \dots \ q_{1,n_{f1}} \ q_{2,1} \ q_{2,2} \ \dots \ q_{n_g,n_{fn_g}}]^T = [q_1 \ q_2 \ \dots \ q_{n_q}]^T.$$

Durch (4.9) wird die Abhängigkeit der Beschleunigungen  $\mathbf{a}$  von  $\ddot{\mathbf{q}}$  deutlich, die eine Projektion aus dem Raum der Lagekoordinaten in den Zustandsraum darstellt. Diese Projektion ermöglicht eine Reduktion der Bewegungsgleichungen, was im nächsten Abschnitt verdeutlicht werden wird.

### 4.3 Bewegungsgleichungen

Die Bewegungsgleichungen stellen die mathematische Beschreibung eines mechanischen Systems dar, auf die die unterschiedlichsten mathematischen Verfahren zur Systemanalyse angewendet werden können. Eine entsprechende Übersicht ist für den Bereich der Fahrzeugsysteme z. B. in [35] gegeben. Die für diese Arbeit maßgebliche Form der Bewegungsgleichungen geht von den Newton-Eulerschen Gleichungen aus, die zunächst für jeden einzelnen Körper  $j$ ,  $j = 1, \dots, n_k$ , aufgestellt werden (Impuls- und Drallsatz),

$$\begin{aligned} m_j \mathbf{a}_{S_j} &= \mathbf{f}_j, \\ \mathbf{I}_j \boldsymbol{\alpha}_{S_j} + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{S_j} \mathbf{I}_j \boldsymbol{\omega}_{S_j} &= \mathbf{l}_j. \end{aligned}$$

Dabei ist  $m_j$  die Masse des Körpers  $j$  und  $\mathbf{I}_j$  ist sein Trägheitstensor. Die Newton-Eulerschen Gleichungen werden bezüglich des Massenmittelpunktes  $S_j$  des Körpers  $j$  angeschrieben,  $\mathbf{a}_{S_j}$  steht für die Beschleunigung dieses Punktes.  $\boldsymbol{\alpha}_{S_j}$  ist die Drehbeschleunigung und  $\boldsymbol{\omega}_{S_j}$  die Drehgeschwindigkeit des Körpers  $j$ . Alle auf Körper  $j$  wirkenden Kräfte  $\mathbf{f}_j$  und Momente  $\mathbf{l}_j$  beziehen sich zum Massenmittelpunkt  $S_j$ .

Die Newton-Eulerschen Gleichungen des gesamten Mehrkörpersystems lassen sich zu

$$\overline{\mathbf{M}} \mathbf{a} + \overline{\mathbf{h}}^c = \overline{\mathbf{h}}^w \quad (4.10)$$

zusammenfassen. Dabei ist  $\overline{\mathbf{M}}$  die blockdiagonale Massenmatrix,

$$\overline{\mathbf{M}} = \text{diag}\{m_1 \mathbf{E} \quad m_2 \mathbf{E} \quad \dots \quad m_{n_k} \mathbf{E} \quad \mathbf{I}_1 \quad \dots \quad \mathbf{I}_{n_k}\},$$

in dem Vektor  $\mathbf{a}$  werden die translatorischen und rotatorischen Beschleunigungen zusammengefasst:

$$\mathbf{a} = [\mathbf{a}_{S_1}^T \quad \mathbf{a}_{S_2}^T \quad \dots \quad \mathbf{a}_{S_{n_k}}^T \quad \boldsymbol{\alpha}_{S_1}^T \quad \boldsymbol{\alpha}_{S_2}^T \quad \dots \quad \boldsymbol{\alpha}_{S_{n_k}}^T]^T.$$

Der Vektor  $\overline{\mathbf{h}}^c$  beinhaltet die Kreiselterme,

$$\overline{\mathbf{h}}^c = [\mathbf{0} \quad (\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{S_1} \mathbf{I}_1 \boldsymbol{\omega}_{S_1})^T \quad (\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{S_2} \mathbf{I}_2 \boldsymbol{\omega}_{S_2})^T \quad \dots \quad (\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{S_{n_k}} \mathbf{I}_{n_k} \boldsymbol{\omega}_{S_{n_k}})^T]^T,$$

und in dem Vektor  $\overline{\mathbf{h}}^w$  treten alle auf jeden einzelnen Körper wirkenden Kräfte und Momente auf:

$$\overline{\mathbf{h}}^w = \overline{\mathbf{h}}^e + \overline{\mathbf{h}}^r = [\mathbf{f}_1^T \quad \mathbf{f}_2^T \quad \dots \quad \mathbf{f}_{n_k}^T \quad \mathbf{l}_1^T \quad \dots \quad \mathbf{l}_{n_k}^T]^T$$

(beinhaltet sowohl die eingepprägten Kräfte  $\overline{\mathbf{h}}^e$  als auch die Reaktionskräfte  $\overline{\mathbf{h}}^r$ ).

Die Reaktionskräfte  $\overline{\mathbf{h}}^r$  entstehen auf Grund der mechanischen Bindungen einzelner Körper und müssen deshalb sowohl betrag- als auch richtungsmäßig die Bewegung der Körper in gesperrte Richtungen verhindern. Der Zusammenhang der Reaktionskräfte mit den gesperrten Richtungen lässt sich mit  $\overline{\mathbf{h}}^r = \boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{\lambda}$  ausdrücken. Dabei bestimmt die Verteilungsmatrix  $\boldsymbol{\Phi}$  (siehe z. B. Gleichung (4.3)) die Beiträge der verallgemeinerten Reaktionskräfte  $\boldsymbol{\lambda}$  in die Koordinaten der Reaktionskräfte  $\overline{\mathbf{h}}^r$ .

Die Bewegungsgleichungen (4.10), ergänzt um die Zwangsbedingungen (4.2), stellen ein System von  $6n_k + n_\lambda$  differentiell-algebraischen Gleichungen für  $6n_k + n_\lambda$  Unbekannten  $\mathbf{a}$  und  $\boldsymbol{\lambda}$  dar,

$$\overline{\mathbf{M}}\mathbf{a} = \overline{\mathbf{h}}^e - \overline{\mathbf{h}}^c + \boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{\lambda}, \quad (4.11a)$$

$$\mathbf{0} = \boldsymbol{\phi}(\mathbf{p}), \quad (4.11b)$$

das einerseits mit den Mitteln der numerischen Mathematik direkt gelöst werden kann. Dabei garantiert die Verteilungsmatrix  $\boldsymbol{\Phi}$  gemeinsam mit den verallgemeinerten Reaktionskräften  $\boldsymbol{\lambda}$  die Erfüllung des durch (4.2) beschriebenen kinematischen Zwangs. Um die Anzahl der zu lösenden Gleichungen zu reduzieren, kann man andererseits aber vorher noch die Topologie des Systems ausnutzen.

Topologisch gesehen entstehen durch die Bindungen im Mehrkörpersystem entweder kinematische Ketten oder, wenn die Kette am gleichen Körper anfängt und endet, kinematische Schleifen. Unter Ausnutzung dieser Tatsache lässt sich die Kinematik aller Körper einer Kette wie in Abschnitt 4.2 beschrieben rekursiv über die Relativkinematik der Gelenke bestimmen. Die Gelenke werden dabei in explizite Gelenke (diese bilden die Kette aus) und in schleifenschließende Gelenke aufgeteilt (diese schließen die Kette zur kinematischen Schleife und werden über die impliziten Bindungsgleichungen (4.2) bis (4.4) beschrieben). Dementsprechend werden auch die (globalen) Reaktionskräfte  $\overline{\mathbf{h}}^r$  aufgeteilt,

$$\overline{\mathbf{h}}^r = \overline{\mathbf{h}}_o^r + \overline{\mathbf{h}}_c^r = \boldsymbol{\Phi}_o^T \boldsymbol{\lambda}_o + \boldsymbol{\Phi}_c^T \boldsymbol{\lambda}_c,$$

wobei sich der Index „o“ auf die Reaktionskräfte der expliziten Gelenke bezieht, der Index „c“ hingegen auf diejenigen der schleifenschließende.

Setzt man die Projektion (4.9) in (4.11a) ein,

$$\overline{\mathbf{M}}(\mathbf{J}\ddot{\mathbf{q}} + \overline{\mathbf{a}}) = \overline{\mathbf{h}}^e - \overline{\mathbf{h}}^c + \boldsymbol{\Phi}_o^T \boldsymbol{\lambda}_o + \boldsymbol{\Phi}_c^T \boldsymbol{\lambda}_c, \quad (4.12)$$

und multipliziert von Links mit der globalen Jacobimatrix  $\mathbf{J}^T$  (aus Gleichung (4.9)), bekommt man die reduzierten Bewegungsgleichungen:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{h}^e - \mathbf{h}^c + \boldsymbol{\Phi}_q^T \boldsymbol{\lambda}_c \quad (4.13)$$

mit

$$\mathbf{M} = \mathbf{J}^T \overline{\mathbf{M}} \mathbf{J}, \quad \mathbf{h}^e = \mathbf{J}^T \overline{\mathbf{h}}^e, \quad \mathbf{h}^c = \mathbf{J}^T (\overline{\mathbf{h}}^c + \overline{\mathbf{M}} \overline{\mathbf{a}}) \quad \text{und} \quad \boldsymbol{\Phi}_q^T = \mathbf{J}^T \boldsymbol{\Phi}_c^T.$$

Dabei nutzt man die globale Orthogonalität der freien und gesperrten Richtungen der *expliziten* Gelenke aus,

$$\boldsymbol{\Phi}_o \mathbf{J} = \mathbf{0} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{J}^T \boldsymbol{\Phi}_o^T = \mathbf{0}, \quad (4.14)$$

wodurch die Reaktionskräfte der expliziten Gelenke aus (4.12) entfallen, siehe dazu z. B. auch [11]. Damit auch die Reaktionskräfte der impliziten Gelenke verschwinden, muss man auf (4.13) die Orthogonalitätsbeziehung in Koordinaten der impliziten Gelenke anwenden, siehe Abschnitt 4.5.

Bei baumstrukturierten Mehrkörpersystemen ohne kinematische Schleifen fällt der letzte Term aus (4.13) weg und es verbleiben nur  $n_f$  Bewegungsgleichungen in  $n_f$  Minimalkoordinaten, wobei  $n_f$  der Anzahl der Systemfreiheitsgrade entspricht. Bei Mehrkörpersystemen mit kinematischen Schleifen müssen dagegen die  $n_q$  Gleichungen (4.13) um die  $n_q - n_f$  Zwangsbedingungen der schleifenschließenden Gelenke (vgl. Gleichung (4.11b)),

$$\phi(\mathbf{q}) = \mathbf{0}, \quad (4.15)$$

ergänzt werden. Die Verteilungsmatrix  $\Phi_q$  in (4.13) kann man dabei direkt mittels  $\Phi_q = \partial\phi/\partial\mathbf{q}^T$  ableiten.

Die Bewegungsgleichungen (4.13) zusammen mit den Zwangsbedingungen (4.15) stellen ein System differentiell-algebraischer Gleichungen vom Index 3 dar, [18]:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{h}^e - \mathbf{h}^c + \Phi_q^T \boldsymbol{\lambda}_c, \quad (4.16a)$$

$$\mathbf{0} = \phi(\mathbf{q}), \quad (4.16b)$$

Eine solche Index 3 Formulierung führt jedoch zu numerischer Instabilität bei der Lösung. Abhilfe schafft die Transformation auf analytisch äquivalente Systeme von niedrigerem Index, die zur numerischen Lösung besser geeignet sind. Der Index lässt sich u. a. dadurch reduzieren, dass man anstatt (4.15) die zeitlichen Ableitungen

$$\dot{\phi} = \Phi_q \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \quad (4.17)$$

bzw.

$$\ddot{\phi} = \Phi_q \ddot{\mathbf{q}} + \dot{\Phi}_q \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \quad (4.18)$$

dieser Zwangsbedingungen verwendet. Beim Ansetzen der Zwangsbedingungen auf Beschleunigungsebene (4.18) lauten die Bewegungsgleichungen in Matrizenform beispielsweise:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \Phi_q^T \\ \Phi_q & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}} \\ -\boldsymbol{\lambda}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}^e - \mathbf{h}^c \\ \mathbf{c}_B \end{bmatrix}, \quad (4.19)$$

wobei  $\mathbf{c}_B = -\dot{\Phi}_q \dot{\mathbf{q}}$  gilt.

Die Anzahl der  $n_f$  Freiheitsgrade eines Mehrkörpersystems mit kinematischen Schleifen ist kleiner als die Anzahl der Freiheitsgrade aller expliziten Gelenke,  $n_q = \sum_{j=1}^{n_g} n_{fj}$ . Die Koordinaten  $\mathbf{q}$  sind folglich nicht unabhängig, der Zustand des Systems wird eindeutig bereits durch  $n_f$  Zustandskoordinaten definiert, die man z. B. durch Auswahl von  $n_f$  unabhängigen Koordinaten  $z_{ui}$ ,  $i = 1, \dots, n_f$  (zusammengefasst im Vektor  $\mathbf{z}_u$ ) aus dem Vektor  $\mathbf{q}$  bekommt. Die restlichen Koordinaten  $z_{ai}$ ,  $i = 1, \dots, n_\lambda$  (zusammengefasst im Vektor  $\mathbf{z}_a$ ) sowie die Ableitungen  $\dot{\mathbf{z}}_a$ ,  $\ddot{\mathbf{z}}_a$  hängen von  $\mathbf{z}_u$ ,  $\dot{\mathbf{z}}_u$  und  $\ddot{\mathbf{z}}_u$  ab. Zur Beschreibung dieser Abhängigkeiten können die Bedingungen (4.15) und ihre Ableitungen (vgl. (4.17) und (4.18)) herangezogen werden.

## 4.4 Mehrkörpermodell einer Radaufhängung

### 4.4.1 Struktur und Kinematik einer Radaufhängung

Als Referenzmodell zur Demonstration der Reduktionstechniken wird ein detailliertes MKS-Modell einer Radaufhängung eingeführt. Dabei wird nur die Kinematik der Radaufhängung betrachtet, d. h. alle Gelenke sind ideal reibungs- und masselos. Die in den



realen Radaufhängungen verwendeten elastischen Lagerelemente werden zunächst nicht betrachtet.

Eine Radaufhängung besteht aus Radträger, Rad und Lenkern (siehe Abbildung 2.5 auf Seite 22), wobei letztere die kinematische Führung des Rades übernehmen. Je nach Anordnung der Lenker und der verwendeten Gelenktypen entsteht eine breite Palette unterschiedlicher Radaufhängungen mit einem oder zwei Freiheitsgraden, die dem Fahrzeugkonstrukteur im Hinblick auf unterschiedliche Anforderungen zur Verfügung stehen [44].

Betrachtet wird das in Abbildung 4.2 (a) dargestellte Modell einer Radaufhängung, dessen Topologie in Abbildung 4.2 (b) skizziert ist. Die kinematische Kette wird dann vom Fahrzeugaufbau (Körper 1) zum Radträger (Körper 3) über einen der Lenker (Körper 2) aufgebaut. Im Folgenden sei gemäß Abbildung 4.2 (b) angenommen, dass hierzu der Lenker  $L_1$  verwendet wird. Über die verbleibenden Lenker (Körper  $i$ ,  $i = 4, 5, 6$ ), entstehen dann die kinematischen Schleifen, die die Beweglichkeit des Radträgers in dem Maße einschränken, dass hinsichtlich der Radaufhängungskinematik die gewünschte Bewegungsfreiheit des Rades erzielt wird. Die kinematische Übertragungsfunktion der Aufhängung wird dann beschrieben durch die Bewegung des mit dem Radträger fest verbundenen Koordinatensystems  $\underline{e}_M := (\underline{e}_{Mx}, \underline{e}_{My}, \underline{e}_{Mz})$  im Radmittelpunkt  $M$  relativ zum Referenzsystem  $\underline{e}_B := (\underline{e}_{Bx}, \underline{e}_{By}, \underline{e}_{Bz})$  im Punkt  $B$  auf dem Fahrzeugaufbau. Im Falle der kinematischen Kette über den Lenker 2 gilt für deren Relativkinematik vom Aufbausystem  $\underline{e}_B$  zum Koordinatensystem  $\underline{e}_M$  (dargestellt im Koordinatensystem  $\underline{e}_B$ , siehe Abbildung 4.2 (a))

$$\mathbf{r}_{BM} = \mathbf{r}_{BB_1} + \mathbf{r}_{B_1C_1} + \mathbf{r}_{C_1M}, \quad (4.20a)$$

$$\mathbf{A}_{BM} = \mathbf{A}_{BB_1} \mathbf{A}_{B_1C_1} \mathbf{A}_{C_1M}. \quad (4.20b)$$

In  $\mathbf{r}_{B_1C_1}$  und  $\mathbf{A}_{B_1C_1}$  spiegelt sich die Kinematik der Gelenke in Punkten  $B_1$  und  $C_1$  wider, die Größen  $\mathbf{r}_{BB_1}$ ,  $\mathbf{A}_{BB_1}$  bzw.  $\mathbf{r}_{C_1M}$ ,  $\mathbf{A}_{C_1M}$  sind dagegen im aufbau- bzw. radträgerfesten System konstant. Für die translatorische und rotatorische Geschwindigkeit ergibt sich damit

$$\dot{\mathbf{r}}_{BM} = \dot{\mathbf{r}}_{B_1C_1} + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{BC_1} \mathbf{r}_{C_1M},$$

$$\boldsymbol{\omega}_{BM} = \boldsymbol{\omega}_{B_1C_1},$$

für die entsprechenden Beschleunigungen folgt

$$\ddot{\mathbf{r}}_{BM} = \ddot{\mathbf{r}}_{B_1C_1} + \dot{\tilde{\boldsymbol{\omega}}}_{BC_1} \mathbf{r}_{C_1M} + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{BC_1} (\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{BC_1} \mathbf{r}_{C_1M}),$$

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_{BM} = \dot{\boldsymbol{\omega}}_{B_1C_1}.$$

Der Einfachheit halber beschränkt man sich bei den weiteren Ausführungen zur Übertragungsfunktion auf den Ortsvektor und die Drehmatrix, die Geschwindigkeiten und Beschleunigungen werden entsprechend der in [63] dargelegten Theorie der gleichzeitigen Bewegungen aufgebaut. Die restlichen Lenker  $i$ ,  $i = 4, 5, 6$  des Gestänges werden über herkömmliche Gelenke an den Radträger gekoppelt, die schleifenschließenden Gelenke sind zwischen diesen Lenkern und dem Aufbau eingebaut, Abbildung 4.2 (b). Die Berücksichtigung der kinematischen Schleifen wird in dem folgenden Beispiel an Hand des in Abbildung 4.3 dargestellten ebenen Modells einer Doppelquerlenker-Radaufhängung demonstriert.

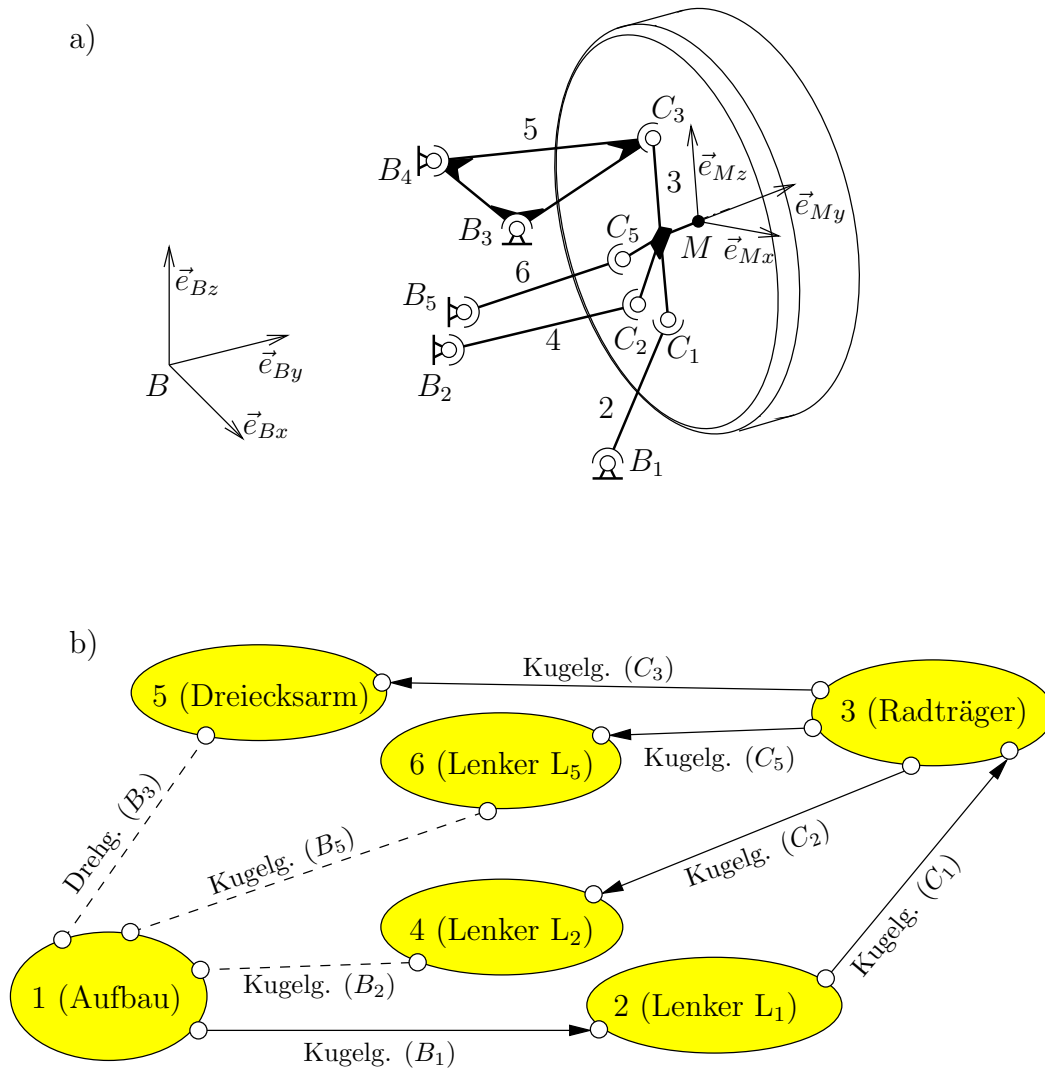


Abbildung 4.2: Skizze (a) und Topologie (b) einer typischen Radaufhängung

**Beispiel 4.1** Das ebene Modell der Doppelquerlenker-Radaufhängung, siehe Abbildung 4.3, besteht aus den folgenden drei Körpern, die miteinander und mit dem Aufbau über die vier Drehgelenke in Punkten  $B_1, B_2, C_1, C_2$  verbunden sind. Der Körper 3 stellt den Radträger dar, die Körper 2 und 4 sind jeweils der untere und obere Lenker. Die Drehgelenke in Punkten  $B_1, C_1, C_2$  seien explizit definiert, als schleifenschließendes, implizit formuliertes Gelenk wird also das Drehgelenk in  $B_2$  gewählt. In der Ebene hat die Radaufhängung  $n_f = 3 \cdot n_k - 2 \cdot n_{rot} = 1$  Freiheitsgrad, wobei  $n_k = 3$  die Anzahl der Körper (außer dem Fahrzeugaufbau) und  $n_{rot} = 4$  die Anzahl der Drehgelenke ist.

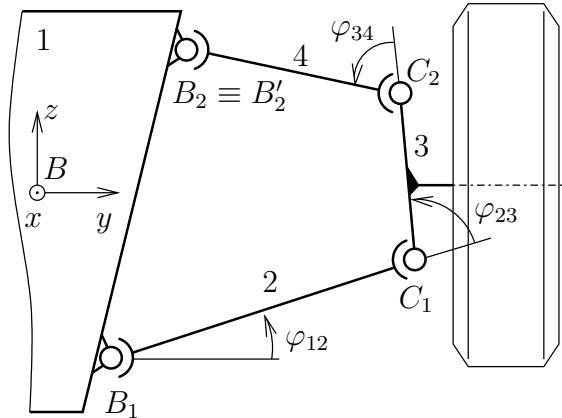


Abbildung 4.3: Ebenes Modell der Doppelquerlenker-Radaufhängung

Die Rotation im Drehgelenk wird mit dem relativen Winkel  $\varphi_{ij}$  zwischen dem Körper  $i$  und dem Körper  $j$  definiert. Die Gelenkkoordinaten der drei expliziten Drehgelenke in  $B_1, C_1, C_2$  kann man z. B. wie folgt auf unabhängige Koordinaten  $z_u$  und abhängige Koordinaten  $z_a$  verteilen:

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_2 \\ \mathbf{q}_3 \\ \mathbf{q}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_{12} \\ \varphi_{23} \\ \varphi_{34} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{u1} \\ z_{a1} \\ z_{a2} \end{bmatrix}.$$

Die Dimension von  $z_u$  ist  $n_f = 1$ , die  $n_\lambda$  Koordinaten  $z_a$  hängen von den unabhängigen Koordinaten  $z_u$  ab, wobei diese Abhängigkeit mit den  $n_\lambda$  Bedingungen gegeben ist,  $n_\lambda = 2$ , die den Zwang im schleifenschließenden Gelenk in  $B_2$  definieren. Die Bedingungen erfordern Übereinstimmung der Punkte  $B_2$  (auf dem Aufbau) und  $B'_2$  (auf dem Lenker 4) bezüglich Lage, Geschwindigkeit und Beschleunigung. In Vektordarstellung lauten die Lagebedingungen:

$$\boldsymbol{\phi} := \mathbf{r}_{B_2 B'_2} = \mathbf{r}_{B B_2} - \mathbf{r}_{B B'_2} = \mathbf{0}, \quad (4.21)$$

womit dann die zwei skalaren Zwangsbedingungen in Richtung  $y$  und  $z$  definiert sind.

Auf Grund der Zwangsbedingungen (4.21) bzw. (4.15) stellen die Bewegungsgleichungen des Gesamtfahrzeugs also ein System differentiell-algebraischer Gleichungen der Form (4.16) dar. Um diese Gleichungen auf die für die Echtzeitsimulation besser geeigneten gewöhnlichen Differentialgleichungen (2.1) zu transformieren, kann man verschiedene

Reduktionstechniken anwenden, siehe z. B. [22, 63, 67]. In den weiteren Abschnitten werden ausgewählte Reduktionstechniken beschrieben, wobei stets zu beachten ist, dass diese auf die durch einen rekursiven Formalismus erzeugten Bewegungsgleichungen angewendet werden können.

#### 4.4.2 Charakteristische Gelenkpaare

Im Hinblick auf eine Vereinfachung der Bewegungsgleichungen einer Radaufhängung sind insbesondere zwei Punkte von entscheidender Bedeutung: Erstens werden zur Untersuchung der Fahrdynamik die Fahrzeuge unterschiedlichsten Fahrtests unterworfen. Die resultierenden Testergebnisse beziehen sich in den meisten Fällen auf die Bewegung des Fahrzeugaufbaus. Die Bewegungen anderer Fahrzeugkomponenten sind hingegen eher seltener von Interesse. Zweitens wird die Masse des Gesamtfahrzeugs hauptsächlich durch den Aufbau (inklusive Karosserie, Ladung, Motor, Insassen) bestimmt, daneben sind noch die Massen von Rädern und Radträgern ebenfalls bedeutend. Die Dynamik der Lenker der Radaufhängungen trägt dagegen zur Fahrdynamik nur geringfügig bei, weil die Massen der Lenker im Vergleich zu denen der anderen Körper betragsmäßig kleiner werden.

Für eine vereinfachte Modellierung der Radaufhängung liegt deshalb die Idee nahe, die für die Dynamikanalyse weniger bedeutenden Lenker zu vernachlässigen. Um jedoch auch im Falle weitgehender, komplexer Fahrmanöver die Reifenkräfte möglichst realitätsstreu nachzubilden, ist hingegen die Radstellung und damit die kinematische Übertragungsfunktion dieser Lenker zu berücksichtigen. Die kinematische Übertragungsfunktion jedes als masselose Koppelstange betrachteten Lenkers wird dabei durch die zwei zugehörigen Gelenke bestimmt, die man auch als *charakteristisches Gelenkpaar* (siehe [68]) zusammenfasst (z. B. die Gelenke in Punkten  $B_1$  und  $C_1$  von Abbildung 4.3).

Die Lenker werden also als masselose Koppellemente betrachtet, die Zustandskoordinaten dieser Lenker treten deshalb im Vektor  $\mathbf{q}$  nicht mehr auf, wodurch sich die Anzahl der Bewegungsgleichungen des Gesamtsystems reduziert. Das charakteristische Gelenkpaar des Lenkers  $L_1$  von Abbildung 4.2 (b) spiegelt sich nun in dem expliziten Gelenk des Radträgers 3 wider:

$$\mathbf{r}_{B_1 C_1} = \mathbf{r}_{g_3}, \quad \mathbf{A}_{B_1 C_1} = \mathbf{A}_{g_3},$$

siehe Gleichung (4.20). Die Bewegungsgleichungen müssen dann allerdings noch um diejenigen Zwangsbedingungen erweitert werden, die die kinematische Übertragungsfunktion der charakteristischen Gelenkpaare restlicher Lenker (Körper  $i$ ,  $i = 4, 5, 6$ ) beschreiben.

Bei Radaufhängungen sind hauptsächlich folgende charakteristischen Gelenkpaare von Bedeutung, siehe [44]: Kugelgelenk/Kugelgelenk, Drehgelenk/Kugelgelenk und Federbein (im Falle der McPherson-Radaufhängung). Die Zwangsbedingungen der charakteristischen Gelenkpaare kann man, wie bereits in Abschnitt 4.1 angeführt, explizit oder implizit formulieren. Für die genannten Gelenkpaare werden sie im Folgenden hergeleitet (siehe z. B. auch [62]).

**Kugelgelenk/Kugelgelenk (Abbildung 4.4 (a)).** Die zwei Kugelgelenke in  $B_i$  und  $C_i$  haben insgesamt sechs Freiheitsgrade. Da jedoch ein Freiheitsgrad der Drehung der Stange um ihre eigene Achse zugeordnet wird, erlaubt diese Verbindung fünf freie Bewegungen.

Bei der impliziten Formulierung besteht die Zwangsbedingung in der konstanten Länge  $l_i$  der Stange,

$$\phi_1 := \mathbf{r}_{B_i C_i}^T \mathbf{r}_{B_i C_i} - l_i^2 = 0.$$

Bei der expliziten Formulierung lauten die fünf Gelenkkoordinaten

$$\mathbf{q} = [\zeta \ \eta \ \alpha \ \beta \ \gamma]^T.$$

Die Winkel  $\zeta$  und  $\eta$  bestimmen dabei die Lage der Stange, die Winkel  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $\gamma$  die Orientierung vom Koordinatensystem in  $C_i$  gegenüber dem Koordinatensystem in  $B_i$ . Damit folgt für die relative Lage und Orientierung des Gelenkpaares,

$$\mathbf{r}_g = \mathbf{r}_{B_i C_i} = \begin{bmatrix} l_i \cos \eta \cos \zeta \\ l_i \cos \eta \sin \zeta \\ l_i \sin \eta \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_g = \mathbf{A}_{B_i C_i} = \mathbf{A}^x(\alpha) \mathbf{A}^y(\beta) \mathbf{A}^z(\gamma),$$

wobei in diesem Fall  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $\gamma$  die Kardanwinkel (siehe [56]) sind.

**Drehgelenk/Kugelgelenk (Abbildung 4.4 (b)).** Für die vier Freiheitsgrade des Gelenkpaares (Drehung um die Drehachse  $\mathbf{d}_{rot}$  und drei Drehungen im Kugelgelenk in  $C_i$ ) lauten die zwei impliziten Zwangsbedingungen

$$\begin{aligned} \phi_1 &:= \mathbf{r}_{B_i C_i}^T \mathbf{r}_{B_i C_i} - l_i^2 = 0 \\ \phi_2 &:= \mathbf{d}_{rot}^T \mathbf{r}_{B_i C_i} - |\mathbf{d}_{rot}| |\mathbf{r}_{B_i C_i}| \cos \zeta_0 = 0. \end{aligned}$$

Die erste Bedingung setzt einen konstanten Abstand  $l_i$  der Verbindungspunkte  $B_i$ ,  $C_i$  voraus, die zweite Bedingung basiert auf der Annahme, dass der Winkel  $\zeta_0$  zwischen dem Vektor  $\mathbf{r}_{B_i C_i}$  und der Drehachse  $\mathbf{d}_{rot}$  konstant bleiben muss. Die Drehachse wird durch die zwei Punkte  $B_i$  und  $B_{i+1}$  gegeben,  $\mathbf{d}_{rot} = \mathbf{r}_{B_i B_{i+1}}$ .

Die Gelenkkoordinaten der expliziten Formulierung sind:

$$\mathbf{q} = [\eta \ \alpha \ \beta \ \gamma]^T.$$

Dabei ist  $\eta$  der Drehwinkel des Armes um die Drehachse  $\mathbf{d}_{rot}$  und  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $\gamma$  bestimmen die Orientierung vom Koordinatensystem in  $C_i$  gegenüber dem Koordinatensystem in  $B_i$ . Für die relative Lage und Orientierung gilt

$$\mathbf{r}_g = \mathbf{r}_{B_i C_i} = \begin{bmatrix} l_i \sin \zeta_0 \cos \eta \\ l_i \cos \zeta_0 \\ l_i \sin \zeta_0 \sin \eta \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_g = \mathbf{A}_{B_i C_i} = \mathbf{A}^x(\alpha) \mathbf{A}^y(\beta) \mathbf{A}^z(\gamma).$$

**Federbein (Abbildung 4.4 (c)).** Diese Verbindung verfügt über vier Freiheitsgrade, die Bewegungen im Schubgelenk des Dämpfers (ein Freiheitsgrad) und im Kugelgelenk in  $B_i$  zwischen Federbein und Aufbau (drei Freiheitsgrade) ermöglichen. Die Schubachse  $\mathbf{d}_{sch}$  und der Vektor  $\mathbf{r}_{B_i C_i}$  müssen zueinander parallel ausgerichtet sein. Da die Schubachse mit dem Einheitsvektor  $\mathbf{e}_{C_i z}$  des Koordinatensystems in  $C_i$  identisch ist, bedingen

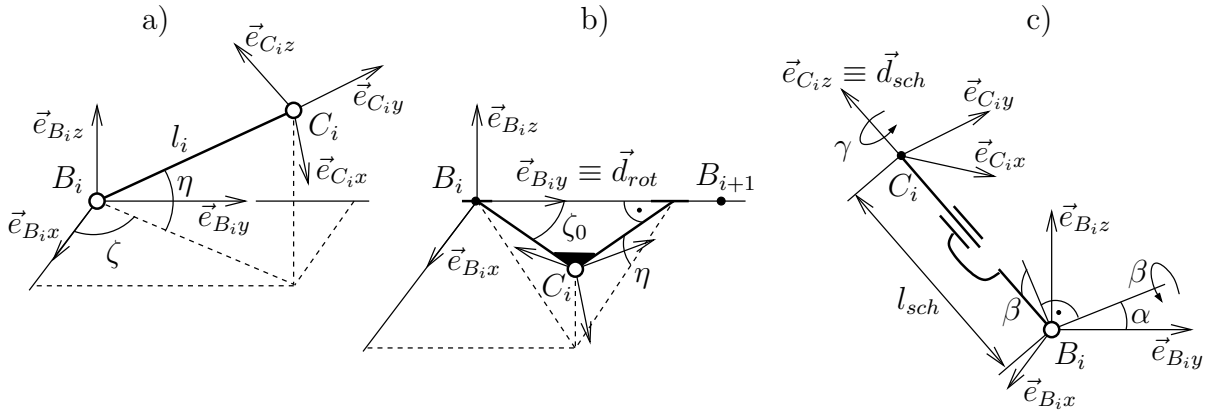


Abbildung 4.4: Charakteristische Gelenkpaare

die zwei impliziten Zwangsbedingungen, dass die Einheitsvektoren  $\mathbf{e}_{C_ix}$  und  $\mathbf{e}_{C_iy}$  senkrecht zum Ortsvektor  $\mathbf{r}_{B_iC_i}$  liegen müssen:

$$\boldsymbol{\phi} := \begin{bmatrix} \mathbf{e}_{C_ix}^T \mathbf{r}_{B_iC_i} \\ \mathbf{e}_{C_iy}^T \mathbf{r}_{B_iC_i} \end{bmatrix} = \mathbf{0}.$$

Für das explizite Gelenkpaar mit den vier unabhängigen Koordinaten

$$\mathbf{q} = [l_{sch} \ \alpha \ \beta \ \gamma]^T$$

bekommt man folgende relative Lage und Orientierung:

$$\mathbf{r}_g = \mathbf{r}_{B_iC_i} = \begin{bmatrix} l_{sch} \sin \beta \\ -l_{sch} \sin \alpha \cos \beta \\ l_{sch} \cos \alpha \cos \beta \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_g = \mathbf{A}_{B_iC_i} = \mathbf{A}^x(\alpha) \mathbf{A}^y(\beta) \mathbf{A}^z(\gamma).$$

Die Winkel  $\alpha$  und  $\beta$  bestimmen die Orientierung der Schubachse  $\mathbf{d}_{sch}$ , der Winkel  $\gamma$  ist die Drehung von Koordinatensystem  $\mathbf{e}_{C_i}$  um die Schubachse  $\mathbf{d}_{sch}$  und  $l_{sch}(t)$  der veränderliche Abstand der Verbindungspunkte  $B_i$  und  $C_i$ .

**Beispiel 4.2** Die ebene Doppelquerlenker-Radaufhängung aus Beispiel 4.1 wird dadurch vereinfacht, dass man jeweils die Lenker 2 bzw. 4 durch eine mittels expliziter bzw. impliziter Zwangsbedingungen ausgedrückte masselose Verbindung mit konstanter Länge (d. h. Drehgelenk/Drehgelenk) ersetzt. In der Gelenkkinematik vom Radträger 3

$$\mathbf{r}_{g_3} = \begin{bmatrix} 0 \\ l_1 \cos \varphi_{12} \\ l_1 \sin \varphi_{12} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_{g_3} = \mathbf{A}^x(\varphi_{12} + \varphi_{23})$$

spiegelt sich das charakteristische Gelenkpaar vom Lenker 2 und die Gelenkkoordinaten vom Radträger 3 lauten damit:

$$\mathbf{q}_3 = \begin{bmatrix} \varphi_{12} \\ \varphi_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{u1} \\ z_{a1} \end{bmatrix}$$

Für das schleifenschließende Gelenkpaar, das den oberen Lenker 4 ersetzt, erhält man folgende Zwangsbedingung:

$$\phi_1 := y_{C_2B_2}^2 + z_{C_2B_2}^2 - l_2^2 = 0. \quad (4.22)$$

Dabei ist  $l_1$  bzw.  $l_2$  die Länge des unteren bzw. oberen Lenkers.

Durch Vernachlässigung der Gestängekörper der Radaufhängung werden die Anzahl der Körper und damit die Anzahl der Koordinaten  $\mathbf{q}$  und der Bewegungsgleichungen der Radaufhängung erheblich reduziert. Die Bewegungsgleichungen des Fahrzeugs stellen jedoch weiterhin ein System der in Echtzeit nicht lösbaren differentiell-algebraischen Gleichungen (4.16) bzw. (4.19) dar. Diese Reduktion ist jedoch eine Basis, auf der dann die weiteren Reduktionstechniken aufbauen.

## 4.5 Makrogelenk

### 4.5.1 Bewegungsgleichungen in unabhängigen Koordinaten

Die Reduktion der Anzahl der Koordinaten  $\mathbf{q}$  und der Bewegungsgleichungen von der Radaufhängung basiert auf der Kenntnis von Systemeigenschaften und -struktur. Die Massen der Körper, die für die Dynamik des Mehrkörpersystems unerheblich sind, werden vernachlässigt. Nur die kinematische Übertragungsfunktion dieser Körper wird mittels ihrer charakteristischen Gelenkpaare berücksichtigt.

Unabhängig von dieser auf das konkrete Mehrkörpersystem bezogenen Reduktion lassen sich die verallgemeinerten Kräfte  $\boldsymbol{\lambda}$  aus der Bewegungsgleichungen (4.19) durch die Standard-Reduktionstechniken eliminieren, siehe z. B. [22, 63]. Mit der Einführung der kleinstmöglichen Anzahl an System-Zustandsgrößen und der Projektion der Bewegungsgleichungen in den Zustandsraum entstehen neue Bewegungsgleichungen. Die Berechnungskomplexität wird dadurch reduziert, da nur die Minimalzahl der Gleichungen integriert werden muss. Die Anzahl der Zustandskoordinaten  $\mathbf{z}_u$  (auch Minimalkoordinaten oder unabhängige Koordinaten genannt) entspricht der Anzahl von Freiheitsgraden  $n_f$  des Gesamtsystems. Diese oft verwendete Reduktionsmethode wird nun kurz zusammengefasst.

Für Mehrkörpersysteme mit kinematischen Schleifen ist die Anzahl der Gelenkkoordinaten  $\mathbf{q}$  größer als die Anzahl der unabhängigen Koordinaten  $\mathbf{z}_u$ , die den Zustand des Systems eindeutig bestimmen. Die  $n_q$  überbestimmten Gelenkkoordinaten  $\mathbf{q}$  lassen sich als eine lineare Kombination der Minimalkoordinaten  $\mathbf{z}_u$  auf der Ebene der Geschwindigkeit darstellen,

$$\dot{q}_j = r_{j1}\dot{z}_{u1} + r_{j2}\dot{z}_{u2} + \cdots + r_{jn_f}\dot{z}_{un_f}, \quad j = 1, \dots, n_q,$$

oder kurz in der Matrizenform:

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{R}\dot{\mathbf{z}}_u. \quad (4.23)$$

Durch Einsetzen von (4.23) in die Geschwindigkeitsbedingung (4.17) der schleifenschließenden Gelenke folgt:

$$\boldsymbol{\Phi}_q \dot{\mathbf{q}} = \boldsymbol{\Phi}_q \mathbf{R} \dot{\mathbf{z}}_u = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{\Phi}_q \mathbf{R} = \mathbf{R}^T \boldsymbol{\Phi}_q^T = \mathbf{0}. \quad (4.24)$$

Die lineare Unabhängigkeit der Minimalkoordinaten  $\dot{\mathbf{z}}_u$  ist notwendige Voraussetzung für die Orthogonalitätsbeziehung  $\Phi_q \mathbf{R} = \mathbf{0}$  (vgl. (4.14)). Auf der Ebene der Beschleunigungen resultiert (4.23) in

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{R}\ddot{\mathbf{z}}_u + \dot{\mathbf{R}}\dot{\mathbf{z}}_u. \quad (4.25)$$

Nach der Projektion der Bewegungsgleichungen (4.13) in den Zustandsraum (gegeben durch (4.25)) und der Multiplikation von links mit  $\mathbf{R}^T$  ergibt sich die Minimalzahl der Bewegungsgleichungen in den Zustandskoordinaten:

$$\mathbf{R}^T \mathbf{M} \mathbf{R} \ddot{\mathbf{z}}_u + \mathbf{R}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{R}} \dot{\mathbf{z}}_u = \mathbf{R}^T \mathbf{h}^e - \mathbf{R}^T \mathbf{h}^c.$$

Die verallgemeinerten Zwangskräfte  $\lambda_c$  der schleifenschließenden Gelenke entfallen auf Grund der Orthogonalitätsbeziehung (4.24):  $\mathbf{R}^T \Phi_q^T \lambda_c = \mathbf{0}$ . Kurz zusammengefasst lauten dann die Gleichungen:

$$\hat{\mathbf{M}} \ddot{\mathbf{z}}_u = \hat{\mathbf{h}}^e - \hat{\mathbf{h}}^c, \quad (4.26)$$

mit

$$\hat{\mathbf{M}} = \mathbf{R}^T \mathbf{M} \mathbf{R}, \quad \hat{\mathbf{h}}^e = \mathbf{R}^T \mathbf{h}^e, \quad \hat{\mathbf{h}}^c = \mathbf{R}^T (\mathbf{h}^c + \mathbf{M} \dot{\mathbf{R}} \dot{\mathbf{z}}_u).$$

Diese Darstellung entspricht der Herleitung der Bewegungsgleichungen (4.13) für baumstrukturierte Mehrkörpersysteme (d. h. ohne den Term  $\Phi_q^T \lambda_c$ ), wobei hier speziell  $\mathbf{R} = \mathbf{J}$  gilt. Die Projektion in den Zustandsraum wird für gewöhnliche Mehrkörpersysteme meistens direkt auf (4.11a) angewendet (mit  $\Phi \mathbf{R} = \mathbf{0}$ ). Für vorliegende Arbeit wird sie jedoch auf Grund des verwendeten rekursiven Formalismus als zusätzliche, nachgelagerte Projektion auf (4.19) angewendet.

Für die Aufstellung der Matrix  $\mathbf{R}$  ist nun die Wahl der unabhängigen Koordinaten  $\mathbf{z}_u$  maßgeblich. Es gibt verschiedene Methoden um diese Koordinaten zu bestimmen. Für die weiteren Überlegungen ist insbesondere die *Koordinatenzerlegung* (engl.: generalized coordinate partitioning, siehe z. B. [67]) von Bedeutung. Bei dieser Methode werden in den Systemkoordinaten unabhängige Koordinaten  $\mathbf{z}_u$  und abhängige Koordinaten  $\mathbf{z}_a$  unterschieden,

$$\mathbf{q} = [\mathbf{z}_u^T \quad \mathbf{z}_a^T]^T.$$

Bei einem allgemeinen MKS ist es möglich, die unabhängigen Koordinaten aus den Gelenkkoordinaten subjektiv zu wählen,

$$\mathbf{B} \dot{\mathbf{q}} = \dot{\mathbf{z}}_u.$$

Die konstante Matrix  $\mathbf{B}$  besteht lediglich aus Null- und Eins-Elementen. Sie soll so gewählt werden, dass die unabhängigen Koordinaten die eindeutige Bestimmung der Systembewegung im möglichst ganzen Bewegungsraum ermöglichen. Bei einem allgemeinen Mehrkörpersystem kann jedoch dazu kommen, dass die gewählten unabhängigen Koordinaten die eindeutige Lagebestimmung des Mehrkörpersystems nur in einem Teil des Bewegungsraums ermöglichen. Bewegt sich das Mehrkörpersystem außerhalb dieses Unterraums, ist eine neue Wahl der unabhängigen Koordinaten notwendig. Da jedoch eine



Radaufhängung ein relativ einfaches System mit niedriger Zahl der Gelenkkoordinaten  $\mathbf{q}$  und beschränkter Bewegungsmöglichkeit ist, lassen sich durch subjektive Wahl die geeigneten unabhängigen Koordinaten für das ganze Bewegungsraum bestimmen.

Entsprechend der Zerlegung der Koordinaten auf unabhängige und abhängige wird auch die Verteilungsmatrix aufgeteilt:

$$\Phi \dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \Phi_{z_a} & \Phi_{z_u} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{z}_a \\ \dot{z}_u \end{bmatrix} = \mathbf{0}. \quad (4.27)$$

Da  $\Phi_{z_u}$  eine reguläre Matrix ist, ergibt sich daraus

$$\dot{z}_a = -\Phi_{z_a}^{-1} \Phi_{z_u} \dot{z}_u \quad (4.28)$$

bzw. folgende Berechnungsvorschrift für die Matrix  $\mathbf{R}$ :

$$\dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \dot{z}_a \\ \dot{z}_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\Phi_{z_a}^{-1} \Phi_{z_u} \\ \mathbf{E} \end{bmatrix} \dot{z}_u = \mathbf{R} \dot{z}_u. \quad (4.29)$$

Die Matrix  $\mathbf{R}$  hängt von Koordinaten  $\mathbf{q}$  des Gesamtsystems ab und muss in jedem Zeitschritt der Integration neu berechnet werden. Dieser Aufwand lässt sich jedoch reduzieren, wenn man das nach dem Abschnitt 4.4.2 bereits vereinfachte Radaufhängungsmodell mit charakteristischen Gelenkpaaren betrachtet und dadurch die Berechnung der Matrix  $\mathbf{R}$  auf dieses Radaufhängungsmodell beschränkt. Diese Vorgehensweise wird im folgenden Abschnitt verdeutlicht.

### 4.5.2 Radaufhängung als Makrogelenk

Bei dem Fahrzeugmodell treten die abhängigen Koordinaten  $z_a$  in einem Subsystem (Radaufhängung) auf. Sie sind abhängig von den Koordinaten  $z_u$ , die nur bei demselben Subsystem vorkommen. Die Erstellung der Matrix  $\mathbf{R}$  lässt sich daher nur auf das Subsystem begrenzen. Betrachtet man das vereinfachte Radaufhängungsmodell (Abschnitt 4.4.2), dann treten die Gelenkkoordinaten  $\mathbf{q}$  der Radaufhängung in einem einzigen Gelenk – im Gelenk des Radträgers 3 – auf. Die Matrix  $\mathbf{R}$  ist deswegen von anderen Gelenkkoordinaten des Systems bzw. von anderen Gelenken unabhängig, was man bereits bei der Evaluierung der Gelenkinematik (4.5) vom Radträger nutzen kann, indem man (4.23) und (4.25) wie folgt direkt einarbeitet:

$$\mathbf{r}_{g_3} = \mathbf{r}_{g_3}(z_{a3}, z_{u3}), \quad (4.30)$$

$$\mathbf{v}_{g_3} = \mathbf{J}_{T3} \dot{\mathbf{q}}_3 + \bar{\mathbf{v}}_{g_3} = \mathbf{J}_{T3} \mathbf{R}_3 \dot{z}_{u3} + \bar{\mathbf{v}}_{g_3} = \hat{\mathbf{J}}_{T3} \dot{z}_{u3} + \bar{\mathbf{v}}_{g_3}, \quad (4.31)$$

$$\mathbf{a}_{g_3} = \mathbf{J}_{T3} \ddot{\mathbf{q}}_3 + \bar{\mathbf{a}}_{g_3} = \mathbf{J}_{T3} \mathbf{R}_3 \ddot{z}_{u3} + \mathbf{J}_{T3} \dot{\mathbf{R}}_3 \dot{z}_{u3} + \bar{\mathbf{a}}_{g_3} = \hat{\mathbf{J}}_{T3} \ddot{z}_{u3} + \hat{\mathbf{a}}_{g_3} \quad (4.32)$$

und entsprechend für die Drehbewegung  $\mathbf{A}_{g_3}$ ,  $\boldsymbol{\omega}_{g_3}$  und  $\boldsymbol{\alpha}_{g_3}$  mit den Gelenkkoordinaten des Radträgers 3:  $\mathbf{q}_3^T = [z_{u3}^T \ z_{a3}^T]$ . Die Gelenkinematik bzw. die Übertragungsfunktion kann dabei direkt für ein radträgerfestes Koordinatensystem mit dem Ursprung in einem beliebigen Punkt  $R$  (wie z. B. Radmittelpunkt  $M$  oder Massenmittelpunkt  $S_3$ ) abgeleitet werden,

$$\mathbf{r}_{g_3} = \mathbf{r}_{B_1 R}, \quad \mathbf{A}_{g_3} = \mathbf{A}_{B_1 R}. \quad (4.33)$$

Da sich die Übertragungsfunktion des gesamten Subsystems in der Kinematik eines einzigen Gelenks (in diesem Fall im Radträgergelenk) widerspiegelt, nennt man dieses Gelenk *Makrogelenk*.

Für die Beschleunigung  $\mathbf{a}_{g_3}$ ,  $\boldsymbol{\alpha}_{g_3}$  vom Radträger ist auch der Term  $\dot{\mathbf{R}}\dot{\mathbf{z}}_u$  von Bedeutung, der durch die Ableitung der Gleichung (4.27) gewonnen wird,

$$\Phi_{z_a} \ddot{\mathbf{z}}_a + \Phi_{z_u} \ddot{\mathbf{z}}_u + \dot{\Phi}_{z_a} \dot{\mathbf{z}}_a + \dot{\Phi}_{z_u} \dot{\mathbf{z}}_u = \mathbf{0}.$$

Daraus ergibt sich:

$$\ddot{\mathbf{z}}_a = -\Phi_{z_a}^{-1} \Phi_{z_u} \ddot{\mathbf{z}}_u - \Phi_{z_a}^{-1} (\dot{\Phi}_{z_a} \dot{\mathbf{z}}_a + \dot{\Phi}_{z_u} \dot{\mathbf{z}}_u) \quad (4.34)$$

bzw.

$$\ddot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{z}}_a \\ \ddot{\mathbf{z}}_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\Phi_{z_a}^{-1} \Phi_{z_u} \\ \mathbf{E} \end{bmatrix} \ddot{\mathbf{z}}_u + \begin{bmatrix} -\Phi_{z_a}^{-1} (\dot{\Phi}_{z_a} \dot{\mathbf{z}}_a + \dot{\Phi}_{z_u} \dot{\mathbf{z}}_u) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \mathbf{R} \ddot{\mathbf{z}}_u + \dot{\mathbf{R}} \dot{\mathbf{z}}_u.$$

Die Abhängigkeiten (4.33) können unterschiedlich gestaltet werden, je nach Wahl der Koordinaten  $\mathbf{q}_3$ . Im Prinzip bieten sich bei dem Radträger die relativen Gelenkkoordinaten an, die bereits wegen Einführung des expliziten Gelenkpaars des ersten Lenkers auftreten (vgl. Beispiel 4.2). Als Alternative kann man jedoch für die Beziehungen (4.33) auch andere Koordinaten wählen, was im Abschnitt 4.6 näher untersucht wird.

### Relative Gelenkkoordinaten

Im nach dem Abschnitt 4.4.2 vereinfachten Radaufhängungsmodell wird die Übertragungsfunktion des Lenkers im expliziten Gelenk des Radträgers eingeschlossen. Da dies das einzige explizite Gelenk des Subsystems ist, treten im Koordinatenvektor  $\mathbf{q}_3$  des Subsystems nur die Gelenkkoordinaten des ersten Lenkers und die des Radträgers auf.

Das explizite Gelenk ermöglicht dem Radträger höchstens fünf Freiheitsgrade je nach dem charakteristischen Gelenkpaar des Lenkers  $L_1$  (Körper 2),  $n_q \leq 5$ . Die impliziten Gelenke (entsprechen den restlichen Lenkern bzw. Körpern  $i$ ,  $i = 4, 5, 6$ , nach Abbildung 4.2 (b)) schränken weiter die Beweglichkeit des Radträgers ein, wobei für die Radaufhängung mit  $n_f$  Freiheitsgraden die Anzahl der impliziten Zwangsbedingungen  $n_\lambda = n_q - n_f$  ist. Die Matrix  $\mathbf{R}$  ergibt sich entsprechend der Gleichung (4.29). Die Matrix  $\Phi_{z_a}$ , die invertiert werden muss (siehe auch Gleichung (4.28)), hat höchstens Dimension von  $n_\lambda \times n_\lambda$ , wobei  $n_\lambda \leq 4$  ist.

**Beispiel 4.3** *Die schleifenschließende Zwangsbedingung der vereinfachten ebenen Doppelquerlenker-Radaufhängung wurde im Beispiel 4.2 angeführt. Dabei gilt für die räumlichen Koordinaten des Vektors  $\mathbf{r}_{C_2B_2}$  (siehe Abbildung 4.3 auf Seite 41):*

$$\mathbf{r}_{C_2B_2} = \begin{bmatrix} x_{C_2B_2} \\ y_{C_2B_2} \\ z_{C_2B_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ l_1 \cos \varphi_{12} + l_2 \cos (\varphi_{12} + \varphi_{23}) - y_{B_1B_2} \\ l_1 \sin \varphi_{12} + l_2 \sin (\varphi_{12} + \varphi_{23}) - z_{B_1B_2} \end{bmatrix}.$$

Wenn man die Vektorkoordinaten in die Zwangsbedingung (4.22) einsetzt, ergeben sich auf Grund der Aufteilung auf abhängige und unabhängige Koordinaten,  $z_{a1} = \varphi_{23}$  und

$z_{u1} = \varphi_{12}$ , die folgenden Verteilungsmatrizen,

$$\begin{aligned}\Phi_{z_a} &= \frac{\partial \phi_1}{\partial z_{a1}} = \\ &= \left[ 2(l_1 \cos \varphi_{12} + l_2 \cos (\varphi_{12} + \varphi_{23}) - y_{B_1 B_2}) (-l_2 \sin (\varphi_{12} + \varphi_{23})) + \right. \\ &\quad \left. + 2(l_1 \sin \varphi_{12} + l_2 \sin (\varphi_{12} + \varphi_{23}) - z_{B_1 B_2}) (l_2 \cos (\varphi_{12} + \varphi_{23})) \right], \\ \Phi_{z_u} &= \frac{\partial \phi_1}{\partial z_{u1}} = \\ &= \left[ 2(l_1 \cos \varphi_{12} + l_2 \cos (\varphi_{12} + \varphi_{23}) - y_{B_1 B_2}) (-l_1 \sin \varphi_{12} - l_2 \sin (\varphi_{12} + \varphi_{23})) + \right. \\ &\quad \left. + 2(l_1 \sin \varphi_{12} + l_2 \sin (\varphi_{12} + \varphi_{23}) - z_{B_1 B_2}) (l_1 \cos \varphi_{12} + l_2 \cos (\varphi_{12} + \varphi_{23})) \right].\end{aligned}$$

Für die Wahl vom Bezugspunkt  $R = C_1$  ändert sich die Kinematik des expliziten Gelenks auf Lageebene nicht, der Ortsvektor  $\mathbf{r}_{g_3}$  und die Drehmatrix  $\mathbf{A}_{g_3}$  können jedoch erst nach der Lösung des Lageproblems ( $\Phi(\mathbf{z}_a, \mathbf{z}_u) = \mathbf{0} \rightarrow \mathbf{z}_a$ ) berechnet werden. Für die Geschwindigkeits- und Beschleunigungsberechnung müssen dagegen die erweiterten Matrizen  $\hat{\mathbf{J}}_{T3}$ ,  $\hat{\mathbf{J}}_{R3}$ ,  $\hat{\mathbf{a}}_{g3}$  und  $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{g3}$  (siehe (4.32)) ermittelt werden.

Die Aufstellung der Zwangsbedingungen  $\phi$  lässt sich für Radaufhängungsmodelle in gewissem Umfang automatisieren. Jede kinematische Schleife wird durch vier Ortsvektoren aufgebaut, Abbildung 4.5. Im Falle der relativen Gelenkkordinaten ergibt jede Schleife folgende Zwangsbedingungen (angegeben im System  $B_1$ ):

$$\mathbf{r}_{B_1 C_1} + \mathbf{r}_{C_1 C_i} - \mathbf{r}_{B_1 B_i} - \mathbf{r}_{B_i C_i} = \mathbf{0}, \quad (4.35a)$$

$$\mathbf{A}_{B_1 C_1} \mathbf{A}_{C_1 C_i} \mathbf{A}_{B_1 B_i}^{-1} \mathbf{A}_{B_i C_i}^{-1} = \mathbf{0}. \quad (4.35b)$$

Die Größen  $\mathbf{A}_{B_i B'_i}$ , und  $\mathbf{A}_{C'_i C_i}$  sind vom Vektor  $\mathbf{q}_3$  des Radträgers abhängig. Weil nur wenige Gelenktypen in der Radaufhängungskonstruktion verwendet werden, lassen sich die Kinematikbeziehungen möglicher charakteristischer Gelenkpaare per Hand ableiten (siehe Abschnitt 4.4.2) und in der Form einer Gelenkpaar-Bibliothek verwenden. Durch Einsetzen der Kenngrößen von verwendeten Gelenkpaaren in (4.35) wird der Prozess der Aufstellung von Zwangsbedingungen automatisiert.

Neben der Aufstellung der Zwangsbedingungen ist vor allem auch ihre Lösung eine Aufgabe, die gemäß den Anforderungen an eine Echtzeitsimulation bewältigt werden muss. Die Zwangsbedingungen stellen üblicherweise ein System von stark nichtlinearen Gleichungen dar, für die folgende Lösungsverfahren zur Verfügung stehen.

### 4.5.3 Lösung nichtlinearer Zwangsbedingungen

Die Berechnung der Kinematik auf Lage-, Geschwindigkeits- und Beschleunigungsebene ist dann möglich, wenn sowohl unabhängige als auch abhängige Koordinaten  $\mathbf{z}_u$  und  $\mathbf{z}_a$  und ihre Ableitungen bekannt sind. Die unabhängigen Koordinaten  $\mathbf{z}_u$  sind aus der Zeitintegration bekannt, die abhängigen  $\mathbf{z}_a$  und ihre Ableitungen müssen aus den impliziten

Bedingungen

$$\phi(\mathbf{z}_a, \mathbf{z}_u) = \mathbf{0}, \quad (4.36)$$

$$\Phi_{\mathbf{z}_a} \dot{\mathbf{z}}_a + \Phi_{\mathbf{z}_u} \dot{\mathbf{z}}_u = \mathbf{0}, \quad (4.37)$$

$$\Phi_{\mathbf{z}_a} \ddot{\mathbf{z}}_a + \Phi_{\mathbf{z}_u} \ddot{\mathbf{z}}_u + \dot{\Phi}_{\mathbf{z}_a} \dot{\mathbf{z}}_a + \dot{\Phi}_{\mathbf{z}_u} \dot{\mathbf{z}}_u = \mathbf{0} \quad (4.38)$$

berechnet werden. Die Gleichungen (4.37) und (4.38) sind linear, (4.36) dagegen nichtlinear. Gesucht ist eine Methode, um den Lösungsvektor  $\mathbf{z}_a$  dieser  $n_\lambda = n_q - n_f$  nichtlinearen Gleichungen  $\phi(\mathbf{z}_a) = \mathbf{0}$  möglichst effizient zu bestimmen.

### Linearisierung des nichtlinearen Gleichungssystems

Wenn die Bewegung des Radträgers während der Simulation lediglich nahe einer Nominallage erfolgt, können die nichtlinearen Zwangsbedingungen (4.36) linearisiert werden. Bei der Radaufhängung ist die Nominallage üblicherweise die Lage, in der das Fahrzeug im statischen Gleichgewicht ist. Bei der Linearisierung wird die nichtlineare Funktion  $\phi(\mathbf{z}_a) = \mathbf{0}$  durch eine lineare Abbildung  $\mathbf{A}\mathbf{z}_{aL} + \mathbf{b} = \mathbf{0}$  ersetzt. Die Lösung  $\mathbf{z}_{aL}$  dieser linearen Abbildung ist dann eine Näherung von  $\mathbf{z}_a$  in der Umgebung der Nominallage  $\mathbf{z}_{a0}$ . Unter Verwendung einer Taylorentwicklung und der Vernachlässigung von Termen zweiter und höherer Ordnung wird das nichtlineare Gleichungssystem entwickelt zu

$$\phi(\mathbf{z}_{aL}, \mathbf{z}_u) = \phi_0 + \Phi_{\mathbf{z}_{a0}}(\mathbf{z}_{aL} - \mathbf{z}_{a0}) + \Phi_{\mathbf{z}_{u0}}(\mathbf{z}_u - \mathbf{z}_{u0}) = \mathbf{0}$$

mit

$$\phi_0 = \phi(\mathbf{z}_{a0}, \mathbf{z}_{u0}), \quad \Phi_{\mathbf{z}_{a0}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{z}_a^T} \phi(\mathbf{z}_{a0}, \mathbf{z}_{u0}) \quad \text{und} \quad \Phi_{\mathbf{z}_{u0}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{z}_u^T} \phi(\mathbf{z}_{a0}, \mathbf{z}_{u0}).$$

Für die lineare Abbildung ergibt sich damit

$$\mathbf{A} = \Phi_{\mathbf{z}_{a0}} \quad \text{und} \quad \mathbf{b} = \phi_0 - \Phi_{\mathbf{z}_{a0}} \mathbf{z}_{a0} + \Phi_{\mathbf{z}_{u0}}(\mathbf{z}_u - \mathbf{z}_{u0}).$$

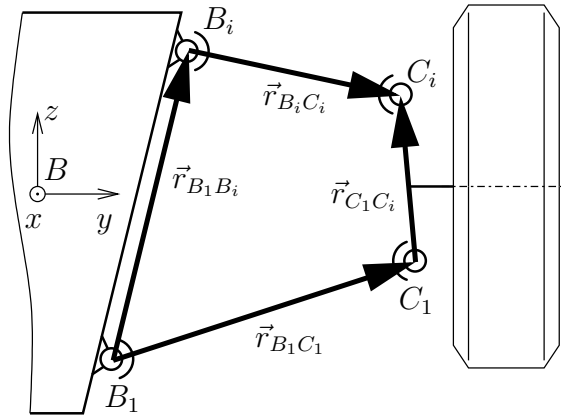


Abbildung 4.5: Vektorkette bei der automatischen Aufstellung der Zwangsbedingungen unter Anwendung von relativen Gelenkkoordinaten

Die linearisierte Lösung  $\mathbf{z}_{aL}$ , die in unmittelbarer Umgebung der Nominallage die exakte Lösung  $\mathbf{z}_a$  annähert, wird in der Praxis nach dem Vorschrift

$$\mathbf{z}_{aL} = \mathbf{z}_{a0} - \mathbf{\Phi}_{z_{a0}}^{-1} \phi_0 - \mathbf{\Phi}_{z_{a0}}^{-1} \mathbf{\Phi}_{z_{u0}} \Delta \mathbf{z}_u = \mathbf{k} - \mathbf{K} \Delta \mathbf{z}_u$$

berechnet, mit  $\Delta \mathbf{z}_u = \mathbf{z}_u - \mathbf{z}_{u0}$ .

Die Nominallage  $\mathbf{z}_{a0}$  muss konsistent sein, d. h. sie muss die Bedingung  $\phi(\mathbf{z}_{a0}, \mathbf{z}_{u0}) = \mathbf{0}$  erfüllen. Dies ist das einzige nichtlineare Gleichungssystem, das nur einmal am Anfang der Simulation gelöst werden muss. Die Lösung der linearisierten Gleichungen ist einfach. Die Rechenzeiten lassen sich gut abschätzen. Doch für größere Bewegungen der Radaufhängung führt die Linearisierung zu ungenauen Ergebnissen, so dass man auf die nichtlinearen Zwangsbedingungen zurückgreifen muss.

### Iterative Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems

Die impliziten Lagebedingungen sind im Allgemeinen stark nichtlineare algebraische Gleichungen. Um dieses nichtlineare Gleichungssystem lösen zu können, d. h. die Nullstellen  $\mathbf{z}_a$  der Funktion  $\phi$  zu finden, verwendet man (außer den trivialen, analytisch lösbaaren Fällen) die iterativen Verfahren. Diese Iterationsverfahren gehören zu den Standardlösungsverfahren der numerischen Mathematik [13, 26]. In der Mehrkörperrdynamik werden sie hauptsächlich bei der Berechnung der konsistenten Anfangswerte der Simulation und bei der Berechnung der Gleichgewichtslage des Mehrkörpersystems angesetzt [3, 18].

Bei dem Iterationsverfahren wird ein Gleichungssystem  $\mathcal{F}(\mathbf{z}_a) = \mathbf{z}_a$  gesucht, das eine Folge  $\mathbf{z}_{a0}, \mathbf{z}_{a1}, \dots$  bildet, die zur richtigen Lösung  $\mathbf{z}_a$  des nichtlinearen Gleichungssystems  $\phi(\mathbf{z}_a) = \mathbf{0}$  konvergiert. Eine häufig verwendete Methode ist das Newtonverfahren,

$$\mathbf{z}_a^{(m+1)} = \mathbf{z}_a^{(m)} - \mathbf{\Phi}_{z_a}^{-1}(\mathbf{z}_a^{(m)}) \phi(\mathbf{z}_a^{(m)}). \quad (4.39)$$

Die Jacobimatrix  $\mathbf{\Phi}_{z_a}$  wird in der Regel nur näherungsweise mit einem numerischen Verfahren berechnet. Wegen der Einführung von unabhängigen Koordinaten für das Radaufhängungs-Subsystem liegt jedoch die analytisch dargestellte Jacobimatrix vor (siehe z. B. (4.27)), was man bei der Iteration nutzen kann.

Einer der Vorteile des Newtonverfahrens gegenüber anderen Iterationsverfahren ist schnelle Konvergenz. Diese ist allerdings (allgemein bei den Iterationsverfahren) nur unter bestimmten Voraussetzungen (z. B. „gute“ Startwerte  $\mathbf{z}_{a0}$ , glatte Funktion  $\phi$ , usw.) gegeben. Da aber bei der Echtzeitsimulation die Zeit für einen Integrationsschritt begrenzt ist, muss man die maximale Anzahl der Iterationen beschränken. Das kann dazu führen, dass die Genauigkeitsanforderungen der Integration nicht mehr erfüllt werden können und die Ergebnisse der Simulation ungenau werden. Diese Nachteile können mit dem folgenden Verfahren umgangen werden.

### Integration der Zwangsbedingung auf Geschwindigkeitsebene

Um eine für die Echtzeitsimulation ungeeignete Iterativlösung zu vermeiden, können die Lagekoordinaten  $\mathbf{z}_a$  durch die Integration der Zwangsbedingung auf Geschwindigkeitsebene (4.37) gewonnen werden. Die Anzahl der integrierten Differentialgleichungen wird zwar

um  $n_{z_a}$  höher, die explizit dargestellten Gleichungen

$$\dot{z}_a = -\Phi_{z_a}^{-1} \Phi_{z_u} \dot{z}_u \quad (4.40)$$

sind jedoch, im Vergleich zu den Bewegungsgleichungen, von so einfacher Gestalt, dass der zusätzliche Aufwand unerheblich ist. Der Zustandsvektor des Gesamtsystems erweitert sich demgemäß um die Koordinaten  $z_a$ .

Wegen des Rundungsfehlers der numerischen Integration von (4.40) kann es jedoch, insbesondere bei längeren Simulationen, dazu kommen, dass die integrierten Koordinaten  $z_a$  die Lagebedingung (4.36) nicht mehr erfüllen. Es entsteht der so genannten „Drift-off“ Effekt, der sich aber durch Stabilisierungstechniken abschwächen oder gar vermeiden lässt [47].

Für die Stabilisierung der Lösung von nichtlinearen Gleichungssystemen sind insbesondere folgende zwei Methoden anwendbar, da sie völlig unabhängig von dem verwendeten Zeitintegrationsverfahren laufen können. Da nur die Lösung der Zwangsbedingung auf Geschwindigkeitsebene (4.37) stabilisiert werden muss, ist auch die einfache Implementierung der Methoden gegeben.

- Baumgarte-Stabilisierung [9]. Bei dieser Stabilisierung wird zur Berechnung der Geschwindigkeitskoordinaten  $\dot{z}_a$  die Zwangsbedingungen sowohl auf Geschwindigkeits- als auch auf Lageebene herangezogen,

$$\Phi_{z_a} \dot{z}_a + \Phi_{z_u} \dot{z}_u + \alpha_B \phi(z_a, z_u) = \mathbf{0}.$$

Daraus folgt anstatt (4.40) die stabilisierte Differentialgleichung:

$$\dot{z}_a = -\Phi_{z_a}^{-1} (\Phi_{z_u} \dot{z}_u + \alpha_B \phi(z_a, z_u)). \quad (4.41)$$

Der konstante Koeffizient  $\alpha_B$  ergibt, wie schnell die in (4.41) auftretenden Störungen gedämpft werden. Wird  $\alpha_B$  zu klein gewählt, dann gibt es kaum Änderungen gegenüber (4.40). Ein zu großer Wert von  $\alpha_B$  führt dagegen zu einer Steifheit der Gleichungen (4.41), die dann den Berechnungsaufwand erheblich beeinträchtigt. Die Bestimmung des Koeffizienten  $\alpha_B$  ist deshalb bei Mehrkörpersystemen in der Regel problematisch. Da es hier jedoch nicht für das gesamte Fahrzeugmodell, sondern nur für die Radaufhängung benötigt wird, ist eine Bestimmung möglich und muss in der Regel nur einmal für jeden Typ der Radaufhängung durchgeführt werden.

- Projektion der Näherungslösung (siehe z. B. [47]). Die Größe  $\tilde{z}_a$  aus dem Integrationsverfahren zum Zeitpunkt  $t_n$  wird als eine genäherte Lösung der Lagebedingung (4.36) interpretiert. Die Näherungslösung wird in einen Unterraum projiziert, in dem der Vektor  $z_a$  liegt. Die Projektion erfolgt durch iteratives Newtonverfahren:

$$z_a^{(k+1)} = z_a^{(k)} - \Phi_{z_a}^{-1}(\tilde{z}_a) \phi(z_a^{(k)}).$$

Wegen der Anforderungen an die Echtzeitfähigkeit können nur ein bis zwei Iterationsschritte ( $k = 0$  bzw.  $k = 1$ ) zur Korrektur durchgeführt werden. Für  $k = 0$  ist dann  $z_a^{(0)} = \tilde{z}_a$  und  $z_a = z_a^{(1)}$ .

Zur Berechnung der Gelenkkinematik auf Lageebene wird der korrigierte Wert  $\mathbf{z}_a$  verwendet. Zur Berechnung von Geschwindigkeit und Beschleunigung kann entweder die bereits vorhandene Jacobimatrix  $\Phi_{\mathbf{z}_a}(\tilde{\mathbf{z}}_a)$  herangezogen werden, oder sie kann neu mit korrigierten Werten berechnet werden  $\Phi_{\mathbf{z}_a}(\mathbf{z}_a)$ .

Im Gegensatz zur Baumgarte-Stabilisierung müssen keine Stabilisierungsparameter bestimmt werden. Der zusätzliche Rechenaufwand ist, insbesondere wenn man keine neue Jacobimatrix  $\Phi_{\mathbf{z}_a}(\mathbf{z}_a)$  berechnet, gering.

Beide Stabilisierungstechniken werden üblicherweise auf die differentiell-algebraischen Gleichungssysteme (4.19) vom Index 1 angewendet, in denen die Zwangsbedingungen auf Beschleunigungsebene auftreten. Hier wird dagegen nur die Geschwindigkeitsbedingung integriert, so dass der zu erwartenden Drift mit den Stabilisierungstechniken gut unterdrückt werden kann.

Auf die Stabilisierung der Zwangsbedingungen kann unter Umständen dann verzichtet werden, wenn die Simulationsgenauigkeit vorab offline abgeschätzt werden kann. In einem Hardware-in-the-Loop Prüfstand mit genau vordefinierten Simulationsszenarien ist dies möglich. Die Echtzeitsimulation in einem Fahrsimulator muss dagegen stabilisiert werden, um den „Drift-off“ Effekt zuverlässig zu vermeiden.

---

Alle oben genannten Methoden haben das Ziel, die abhängigen Koordinaten  $\mathbf{z}_a$  zu berechnen, wobei sie von der impliziten Darstellung der Zwangsbedingungen ausgehen. Viele damit verbundene Probleme lassen sich vermeiden, wenn die Zwangsbedingungen in der expliziten Form  $\mathbf{z}_a = \mathbf{z}_a(\mathbf{z}_u)$  gegeben sind. Der Bereitstellung der expliziten Zwangsbedingungen wird der Abschnitt 4.7 gewidmet.

## 4.6 Makrogelenk in natürlichen Koordinaten

Die Reduktion der Radaufhängungsmodelle im Abschnitt 4.5 verwendet die Formulierung in unabhängigen Koordinaten. Das zentrale Thema ist dabei die Lösung der Lagebedingungen (4.36), die in der Regel starke Nichtlinearitäten aufweisen. Die Linearisierung der Gleichungen ist möglich, sie ist jedoch nur in einem gewissen Bereich um die Nominallage anwendbar. Als Alternative, die eine effiziente Auswertung der nichtlinearen Gleichungen ermöglichen könnte, bietet sich die Formulierung des Problems in natürlichen Koordinaten [23, 22].

Im Vergleich zu anderen Koordinatentypen, z. B. zu Relativkoordinaten oder kartesischen Koordinaten, hat die Verwendung natürlicher Koordinaten im Allgemeinen den Vorteil, dass keine trigonometrischen Funktionen in den Lagebedingungen auftreten (siehe Beispiel 4.4) und die Nichtlinearitäten sind dann höchstens quadratisch. Die Jacobimatrix  $\Phi$  weist dadurch nur lineare Elemente auf (Gleichungen (4.49)). Von Nachteil ist dagegen, dass die direkte Formulierung der Körperbewegung, insbesondere der Drehbewegung, nicht möglich ist, was zusätzliche Berechnungen erforderlich macht (siehe Abschnitt 4.6.4).

### 4.6.1 Theoretische Grundlagen natürlicher Koordinaten

Natürliche Koordinaten fassen die kartesischen Koordinaten gewisser Punkte und normierter Richtungsvektoren des Systems zusammen. Diese Punkte und Richtungsvektoren sind jeweils einem Gelenk zugeordnet und lassen sich somit auf die zwei benachbarten Körper beziehen, die durch das Gelenk verbunden sind. Starre Körper lassen sich somit durch konstante Abstände zwischen verschiedenen Punkten und durch konstante Winkel zwischen den Vektoren des Körpers charakterisieren. Die Freiheit in den Gelenken wird beschrieben durch die Identität von Punkten bzw. Richtungsvektoren benachbarter Körper. Die Verwendung natürlicher Koordinaten wird nun kurz an einem einfachen ebenen Beispiel verdeutlicht.

**Beispiel 4.4** Ein ebenes mechanisches System von Körpern 1, 2, 3 und 4, drei Drehgelenken und einem Schubgelenk hat einen Freiheitsgrad (Abbildung 4.6). Die Drehgelenke werden durch die Punkte A, B und D charakterisiert, das Schubgelenk durch den Punkt C und den Richtungsvektor  $\mathbf{u}$ . Die Punkte A und B liegen auf dem Körper 2, die Punkte C und D und der Richtungsvektor  $\mathbf{u}$  liegen auf dem Körper 4. Auf dem Körper 3 liegt der Punkt H, aber auch der Punkt B.

Im Weiteren wird folgende Schreibweise verwendet. Die Ortsvektoren der Punkte sind

$$\mathbf{r}_i = [x_i \ y_i \ z_i]^T, \quad i = A, B, C, D, H,$$

die Relativvektoren zwischen den Punkten sind

$$\mathbf{r}_{ij} = \begin{bmatrix} x_{ij} \\ y_{ij} \\ z_{ij} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_j - x_i \\ y_j - y_i \\ z_j - z_i \end{bmatrix}, \quad i, j = A, B, C, D, H, \quad i \neq j.$$

Die Größe eines Vektors,  $l_{ij} = |\mathbf{r}_{ij0}|$ ,  $i, j = A, B, C, D, H$ ,  $i \neq j$ , ist gleich dem Abstand der zwei Punkte  $i$  und  $j$  in der Nominallage des mechanischen Systems (Index 0). Für den Richtungsvektor  $\mathbf{u}$  gilt:

$$\mathbf{u} = [u_x \ u_y \ u_z]^T, \quad |\mathbf{u}| = 1.$$

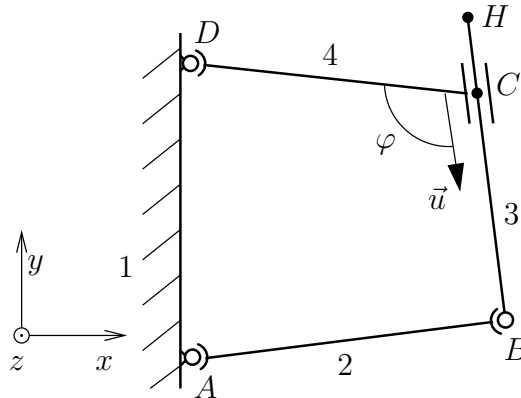


Abbildung 4.6: Beispiel eines ebenen Mechanismus



Alle Koordinaten werden im Inertialsystem angegeben, die Darstellung in einem anderen Koordinatensystem ist ebenso möglich.

Die Punkte  $A$  und  $D$  sind fest. Die Koordinaten der Punkte  $B$ ,  $C$ ,  $H$  und des Richtungsvektors  $\mathbf{u}$  sind die natürlichen Koordinaten in der Gesamtanzahl  $3 \times 4 = 12$ . Das Mehrkörpersystem hat eine Zustandskoordinate (z. B.  $z_{u1} = y_H$ ), von der die anderen elf Koordinaten abhängen,

$$\mathbf{z}_a = [x_B \ y_B \ z_B \ x_C \ y_C \ z_C \ x_H \ z_H \ u_x \ u_y \ u_z]^T.$$

Für die elf Koordinaten  $\mathbf{z}_a$  werden nun elf Bedingungen definiert. Die ersten vier Bedingungen folgen aus der Voraussetzung „ebenes mechanisches System“:

$$\begin{aligned} \phi_1 &:= z_B = 0, & \phi_3 &:= z_H = 0 \\ \phi_2 &:= z_C = 0, & \phi_4 &:= u_z = 0. \end{aligned} \quad (4.42)$$

Die weiteren Bedingungen ergeben sich aus der Starrheit der Körper. Der Ortsvektor  $\mathbf{r}_{AB} = \mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A$  zwischen den Punkten  $A$  und  $B$  auf dem ersten Körper muss die konstante Länge  $l_{AB}$  aufweisen. Dafür ergibt sich die Bedingung

$$\phi_5 := \mathbf{r}_{AB}^T \mathbf{r}_{AB} - l_{AB}^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 - l_{AB}^2 = 0, \quad (4.43)$$

wobei  $l_{AB} = |\mathbf{r}_{AB0}|$  die Länge des Vektors  $\mathbf{r}_{AB}$  in der Nominallage ist. Für weitere Punkte auf den Körpern 3 und 4 gilt dementsprechend

$$\phi_6 := \mathbf{r}_{BH}^T \mathbf{r}_{BH} - l_{BH}^2 = 0, \quad \phi_7 := \mathbf{r}_{CD}^T \mathbf{r}_{CD} - l_{CD}^2 = 0. \quad (4.44)$$

Außerdem muss der Richtungsvektor  $\mathbf{u}$  auf dem Körper 4 den konstanten Winkel  $\varphi$  zum Vektor  $\mathbf{r}_{CD}$  aufweisen. Aus dem Skalarprodukt folgt,

$$\phi_8 := \mathbf{u}^T \mathbf{r}_{CD} - |\mathbf{u}| |\mathbf{r}_{CD}| \cos \varphi = u_x(x_D - x_C) + u_y(y_D - y_C) - k = 0, \quad (4.45)$$

mit der Konstante  $k = l_{CD} \cos \varphi$  und  $|\mathbf{u}| = 1$ ,  $l_{CD} = |\mathbf{r}_{CD}|$ . Die Konstante  $k$  wird in der Nominallage definiert.

Mit den weiteren Bedingungen wird die Funktionalität des Schubgelenks beschrieben. Der Richtungsvektor  $\mathbf{u}$  ist parallel mit dem Vektor  $\mathbf{r}_{BH}$ . Das Kreuzprodukt dieser zwei Vektoren muss daher der Nullvektor sein,  $\vec{u} \times \vec{r}_{BH} = \vec{0}$ , was für den ebenen Mechanismus folgende Bedingung ergibt

$$\phi_9 := u_x(y_H - y_B) - u_y(x_H - x_B) = 0. \quad (4.46)$$

Weiter gilt für das Schubgelenk, dass der Punkt  $C$  auf der Geraden liegt, die durch die Punkte  $B$  und  $H$  gegeben ist,  $y_C - y_B = m(x_C - x_B)$ , mit dem Richtungskoeffizienten der Gerade  $m = \frac{y_H - y_B}{x_H - x_B}$ . Diese Bedingung kann man umformen zu

$$\phi_{10} := (x_C - x_B)(y_H - y_B) - (y_C - y_B)(x_H - x_B) = 0. \quad (4.47)$$

Die Funktionalität der Drehgelenke wird dadurch gesichert, dass die zugehörigen Punkte ( $A$ ,  $B$ ,  $D$ ) den Körpern 1, 2, 3 und 4 gemeinsam sind, d. h. die Punkte treten in der Bedingungen beider benachbarter Körper auf, die die konstanten Abstände körperfester

Punkte definieren (z. B. beim Drehgelenk im Punkt B sind es die Gleichungen (4.43) und (4.44) für die Körper 2 und 3).

Die letzte Bedingung besagt schließlich, dass die Länge des Vektors  $\mathbf{u}$  gleich Eins ist,

$$\phi_{11} := \mathbf{u}^T \mathbf{u} - 1 = u_x^2 + u_y^2 - 1 = 0. \quad (4.48)$$

Mit diesen elf Zwangsbedingungen (4.42) bis (4.48) kann die Lage des Mehrkörpersystems für gegebene  $z_{u1}$  eindeutig bestimmt werden. Für die Berechnung der Kinematik und Dynamik des Mehrkörpersystems sind außerdem noch die Jacobimatrizen von Interesse, die folgende einfache Form haben

$$\Phi_{z_a} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2x_{AB} & 2y_{AB} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2x_{BH} & -2y_{BH} & 0 & 0 & 0 & 0 & 2x_{BH} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2x_{CD} & -2y_{CD} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -u_x & -u_y & 0 & 0 & 0 & x_{CD} & y_{CD} & 0 \\ u_y & -u_x & 0 & 0 & 0 & 0 & -u_y & 0 & y_{BH} & -x_{BH} & 0 \\ -y_{CH} & x_{CH} & 0 & y_{BH} & -x_{BH} & 0 & -y_{BC} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2u_x & 2u_y & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.49)$$

$$\Phi_{z_u} = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 2y_{BH} \ 0 \ 0 \ u_x \ x_{BC} \ 0]^T. \quad (4.50)$$

Die Elemente der Jacobimatrizen hängen nur linear von den natürlichen Koordinaten ab. Dies gilt auch für ein räumliches mechanisches System.

Die natürlichen Koordinaten werden nur zur Formulierung der Zwangsbedingungen angesetzt, da der verwendete MKS-Formalismus keineswegs modifiziert werden soll. Damit lassen sich die weiteren Vorteile der natürlichen Koordinaten für die Formulierung der Bewegungsgleichungen (z. B. konstante, dünnbesetzte Massenmatrix, keine Coriolis- und Zentrifugalkräfte, siehe [22, 63]) nicht nutzen.

Die Nachteile der natürlichen Koordinaten bestehen aus einer hohen Anzahl der unbekannten Koordinaten  $z_a$  und der aufwändigen Darstellung der Drehbewegung. Von Vorteil ist dagegen, dass in Lagebedingungen die Nichtlinearitäten höchstens quadratisch auftreten.

## 4.6.2 Allgemeine Radaufhängung

Der Ansatz der natürlichen Koordinaten wird auf die Raumenker-Radaufhängung (Fünflenker-Radaufhängung) angewendet. Da diese Radaufhängung nur über Kugelgelenke verfügt, werden Koordinaten der Punkte in der Mitte der Gelenke als natürliche Koordinaten verwendet, siehe Abbildung 4.7. Für fünf Punkte  $C_1$  bis  $C_5$  gibt es insgesamt fünfzehn natürliche Koordinaten, die man im Lagevektor des Radträgers 3 zusammenfasst:

$$\mathbf{p}_3 = [p_{3,1} \ p_{3,2} \ p_{3,3} \ p_{3,4} \ \dots \ p_{3,15}]^T = [x_{B_1C_1} \ y_{B_1C_1} \ z_{B_1C_1} \ x_{B_1C_2} \ \dots \ z_{B_1C_5}]^T,$$



Die Formulierung der drei zugeordneten Zwangsbedingungen richtet sich danach, welcher Körper der Radaufhängung mit dem Dämpfer verbunden ist. Wenn der Punkt  $D_C$  auf dem Radträger liegt, werden die drei Bindungen nach (4.53) angewendet.

Der Verbindungspunkt  $D_C$  kann aber auch auf einem Lenker liegen. Gibt man diesem Lenker die Nummer 1, so folgt, dass die zwei Vektoren  $\mathbf{r}_{B_1C_1}$  und  $\mathbf{r}_{B_1D_C}$  kollinear sind bzw. dass der Vektor  $\mathbf{r}_{B_1D_C}$  linear vom Vektor  $\mathbf{r}_{B_1C_1}$  abhängt [22],

$$\mathbf{r}_{B_1C_1} - \kappa \mathbf{r}_{B_1D_C} = \mathbf{0}, \quad (4.54)$$

wobei  $\kappa = l_{B_1C_1}/l_{B_1D_C} > 1$  eine Konstante ist. Für die natürlichen Koordinaten  $\mathbf{p}_3$  der Raumlanker-Radaufhängung werden damit insgesamt siebzehn Zwangsbedingungen definiert.

Wenn die zwei unteren Lenker 2 und 4 zu einem Dreieckslenker zusammengelegt werden, d. h.  $C_2 \equiv C_1$ , und der Punkt  $D_C$  auf diesem Dreieckslenker liegt, unterliegen seine drei Koordinaten wieder den Bedingungen für einen körperfesten Zusatzpunkt (vgl. (4.53)),

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{C_1D_C}^T \mathbf{r}_{C_1D_C} - l_{C_1D_C}^2 &= 0, \\ \mathbf{r}_{B_1D_C}^T \mathbf{r}_{B_1D_C} - l_{B_1D_C}^2 &= 0, \\ \mathbf{r}_{B_2D_C}^T \mathbf{r}_{B_2D_C} - l_{B_2D_C}^2 &= 0. \end{aligned}$$

Bei solcher Radaufhängungen fallen die Koordinaten von  $C_2$  aus dem Vektor  $\mathbf{p}_3$  weg. Das Gleiche gilt auch im Falle des oberen Dreieckslenkers ( $C_4 \equiv C_3$ ). Damit wird die Anzahl der Zwangsbedingungen  $\phi$  und Koordinaten  $\mathbf{p}_3$  um drei bzw. sechs reduziert.

Für die Radaufhängung mit einem Freiheitsgrad wird eine der Koordinaten  $p_{3,i}$  als unabhängige Variable gewählt, z. B. wird

$$z_{u1} = p_{3,3} = z_{B_1C_1}.$$

Oft ist es jedoch vorteilhaft, die Dämpferlänge  $l_{dam}(t)$ , als  $z_{u1}$  zu definieren:

$$z_{u1} = p_{3,19} = l_{dam}.$$

Die zugehörige Zwangsbedingung vergleicht den Abstand zwischen den zwei Verbindungspunkten  $D_B$  und  $D_C$  mit der Dämpferlänge  $l_{dam}$ :

$$\mathbf{r}_{D_C D_B}^T \mathbf{r}_{D_C D_B} - l_{dam}^2 = 0.$$

Möchte man auch die Lenkbewegung der Radaufhängung berücksichtigen, um eine möglichst universelle Beschreibung zu erhalten, so wird der Lenker 7 als Lenkstange betrachtet. Die Bewegung der Zahnstange wird dann durch die Querbewegung des Punktes  $B_5$  charakterisiert. Seine Querkoordinate  $y_{B_1B_5}$  muss also im Vektor der natürlichen Koordinaten auftreten:

$$p_{3,20} = z_{u2} = y_{B_1B_5}.$$

### Kinematikauswertung

Die Kinematik der Radaufhängung ist mit den oben abgeleiteten Zwangsbedingungen eindeutig bestimmt. Für die neunzehn bzw. zwanzig natürlichen Koordinaten  $\mathbf{p}_3$  gibt es achtzehn Zwangsbedingungen für die Radaufhängung mit einem bzw. zwei Freiheitsgraden. Der Vektor  $\mathbf{p}_3$  wird in die unabhängigen Koordinaten  $\mathbf{z}_u$  und die abhängigen Koordinaten  $\mathbf{z}_a$  zerlegt und die Gelenkkinematik des Radträgers wird nach Abschnitt 4.5 berechnet. Durch die Wahl natürlicher Koordinaten ergeben sich in den Zwangsbedingungen höchstens Terme zweiter Ordnung und in den Jacobimatrizen höchstens Terme erster Ordnung in den Koordinaten (Beispiel 4.4).

Die Mehrzahl der Einzelradaufhängungen, die Kugel- oder Drehgelenke beinhalten, ist mit den oben angeführten Zwangsbedingungen lösbar, weil die Raumlenker-Radaufhängung eine Verallgemeinerung dieser Gruppe der Radaufhängungen darstellt [44] (Abbildung 4.8). Für wenige Radaufhängungen, die auch andere Gelenktypen beinhalten, müssen jedoch die Zwangsbedingungen modifiziert bzw. neu abgeleitet werden, was am Beispiel von Federbein-Radaufhängung im Abschnitt 4.6.5 demonstriert wird.

Die obigen Kinematikgleichungen beschreiben die Grundlage des Makrogelenks mit den natürlichen Koordinaten. Um die Bewegung des Radträgers völlig zu bestimmen, muss nun die Bewegung des Radmittelpunktes  $M$  und die Drehbewegung dargestellt werden.

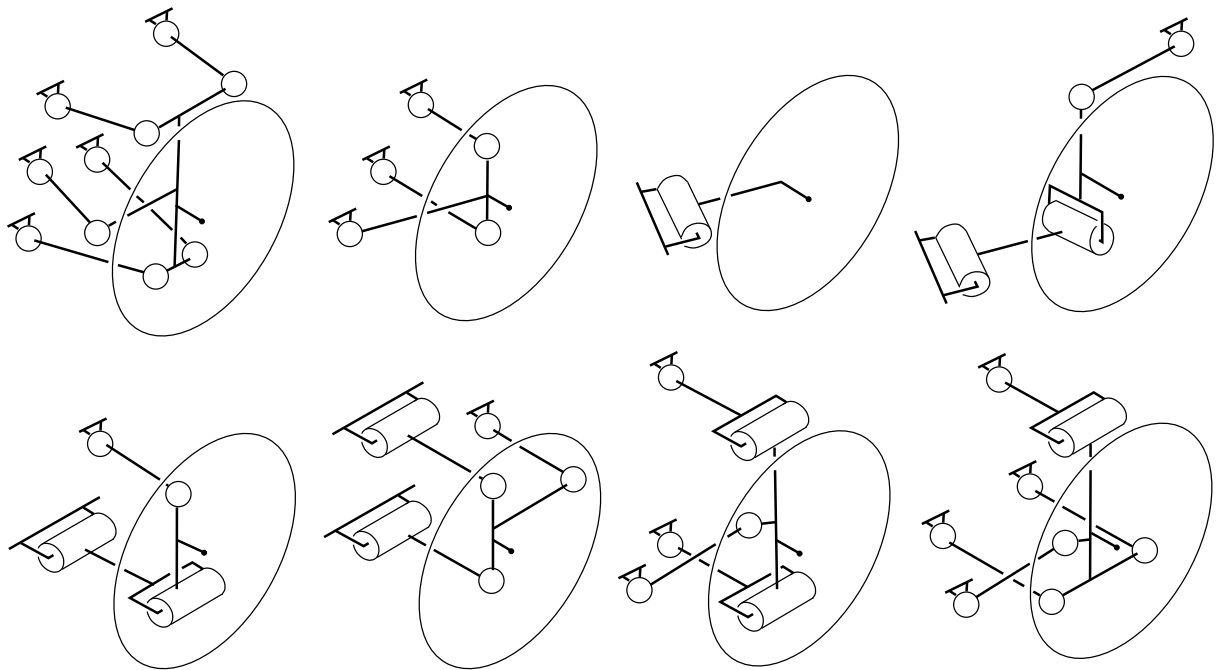


Abbildung 4.8: Übersicht der von der Raumlenker-Radaufhängung ableitbaren Einzelradaufhängungen (Bild nach Matschinsky [44])

### 4.6.3 Translatorische Bewegung des Radträgers

Zur Bestimmung der Bewegung des Radträgers wird das Koordinatensystem herangezogen, dessen Ursprung im Radmittelpunkt liegt. Da der Radmittelpunkt  $M$  ein radträgerfester Punkt ist, kann man seine Bewegung relativ zur bereits bekannten Bewegung eines Bezugspunktes (z. B.  $C_1$ ) angeben,

$$\mathbf{r}_M = \mathbf{r}_{C_1} + \mathbf{A}_M \mathbf{r}_{C_1 M}, \quad (4.55a)$$

$$\mathbf{v}_M = \mathbf{v}_{C_1} + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_M \mathbf{r}_{C_1 M}, \quad (4.55b)$$

$$\mathbf{a}_M = \mathbf{a}_{C_1} + \tilde{\boldsymbol{\alpha}}_M \mathbf{r}_{C_1 M} + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_M \tilde{\boldsymbol{\omega}}_M \mathbf{r}_{C_1 M}. \quad (4.55c)$$

Dabei wird vorausgesetzt, dass die Drehbewegung des Radträgers ebenfalls bereits bekannt ist (siehe 4.6.4).

Anstatt (4.55) kann  $M$  auch als Zusatzpunkt  $Q$  auf dem Radträger aufgefasst werden. Der Vektor  $\mathbf{p}_3$  wird dann um die drei kartesischen Koordinaten von  $M$  und der Vektor der Zwangsbedingungen  $\boldsymbol{\phi}$  um drei Gleichungen (4.53) erweitert.

Die dritte Möglichkeit zur Berechnung von  $M$  besteht darin, dass man einen Zusatzvektor der unbekannten Koordinaten von  $M$  einführt

$$\mathbf{z}_{al} = [x_{B_1 M} \ y_{B_1 M} \ z_{B_1 M}]^T. \quad (4.56)$$

Der Lagevektor ist dann,

$$\mathbf{p}_3 = [\mathbf{z}_a^T \ \mathbf{z}_{al}^T \ \mathbf{z}_u^T]^T.$$

Der Vektor  $\mathbf{z}_{al}$  tritt nur in den drei zusätzlichen Bedingungen (4.53) auf, die man kurz als lokale Zwangsbedingungen  $\boldsymbol{\phi}_l$  kennzeichnet. Dabei gilt,

$$\boldsymbol{\phi}(\mathbf{z}_a, \mathbf{z}_u) = \mathbf{0},$$

$$\boldsymbol{\phi}_l(\mathbf{z}_a, \mathbf{z}_{al}, \mathbf{z}_u) = \mathbf{0}.$$

Die zusätzlichen Geschwindigkeits- und Beschleunigungsbedingungen lauten,

$$\dot{\boldsymbol{\phi}}_l = \frac{d}{dt} \boldsymbol{\phi}_l = \boldsymbol{\Phi}_{l z_a} \dot{\mathbf{z}}_a + \boldsymbol{\Phi}_{l z_{al}} \dot{\mathbf{z}}_{al} + \boldsymbol{\Phi}_{l z_u} \dot{\mathbf{z}}_u = \mathbf{0},$$

$$\ddot{\boldsymbol{\phi}}_l = \frac{d}{dt} \dot{\boldsymbol{\phi}}_l = \boldsymbol{\Phi}_{l z_a} \ddot{\mathbf{z}}_a + \boldsymbol{\Phi}_{l z_{al}} \ddot{\mathbf{z}}_{al} + \boldsymbol{\Phi}_{l z_u} \ddot{\mathbf{z}}_u + \mathbf{c}_{Bl} = \mathbf{0}$$

mit  $\boldsymbol{\Phi}_{l z_a} = \partial \boldsymbol{\phi}_l / \partial \mathbf{z}_a^T$ ,  $\boldsymbol{\Phi}_{l z_{al}} = \partial \boldsymbol{\phi}_l / \partial \mathbf{z}_{al}^T$ ,  $\boldsymbol{\Phi}_{l z_u} = \partial \boldsymbol{\phi}_l / \partial \mathbf{z}_u^T$  und mit dem Zusatzterm in den Beschleunigungsbedingungen  $\mathbf{c}_{Bl}$ . Die Geschwindigkeit und Beschleunigung von  $M$  sind dann:

$$\dot{\mathbf{z}}_{al} = -\boldsymbol{\Phi}_{l z_{al}}^{-1} (\boldsymbol{\Phi}_{l z_a} \dot{\mathbf{z}}_a + \boldsymbol{\Phi}_{l z_u} \dot{\mathbf{z}}_u),$$

$$\ddot{\mathbf{z}}_{al} = -\boldsymbol{\Phi}_{l z_{al}}^{-1} (\boldsymbol{\Phi}_{l z_a} \ddot{\mathbf{z}}_a + \boldsymbol{\Phi}_{l z_u} \ddot{\mathbf{z}}_u + \mathbf{c}_{Bl})$$

oder durch Einsetzen aus (4.28) und (4.34) in  $\dot{\mathbf{z}}_a$  und  $\ddot{\mathbf{z}}_a$ :

$$\dot{\mathbf{z}}_{al} = -\boldsymbol{\Phi}_{l z_{al}}^{-1} (\boldsymbol{\Phi}_{l z_a} (-\boldsymbol{\Phi}_{z_a}^{-1} \boldsymbol{\Phi}_{z_u}) + \boldsymbol{\Phi}_{l z_u}) \dot{\mathbf{z}}_u = \mathbf{J}_{TM} \dot{\mathbf{z}}_u, \quad (4.57)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{z}}_{al} &= -\boldsymbol{\Phi}_{l z_{al}}^{-1} (\boldsymbol{\Phi}_{l z_a} (-\boldsymbol{\Phi}_{z_a}^{-1} \boldsymbol{\Phi}_{z_u}) + \boldsymbol{\Phi}_{l z_u}) \ddot{\mathbf{z}}_u - \boldsymbol{\Phi}_{l z_{al}}^{-1} (-\boldsymbol{\Phi}_{z_a}^{-1} (\dot{\boldsymbol{\Phi}}_{z_a} \dot{\mathbf{z}}_a + \dot{\boldsymbol{\Phi}}_{z_u} \dot{\mathbf{z}}_u) + \mathbf{c}_{Bl}) = \\ &= \mathbf{J}_{TM} \ddot{\mathbf{z}}_u + \overline{\ddot{\mathbf{z}}_{al}}. \end{aligned} \quad (4.58)$$

Die entstehenden Gleichungen (4.57) und (4.58) sind komplizierter als diejenigen, die durch Erweiterung des Koordinatenvektors  $\mathbf{z}_a$  nach der zweiten Vorgehensweise gewonnen wurden (vgl. (4.28) und (4.34)). Vorteilhaft ist aber, dass die Jacobimatrix  $\Phi_{\mathbf{z}_{al}}$  von kleinerer Dimension und damit einfacher invertierbar ist.

**Beispiel 4.5** Die Raumlanker-Radaufhängung hat  $n_{z_a} + n_{z_{al}} = 17 + 3 = 20$  abhängige Koordinaten  $\mathbf{z}_a$  (inklusive die Koordinaten des Radmittelpunktes  $M$ ). Die Jacobimatrix  $\Phi_{\mathbf{z}_a}$ , die invertiert werden muss, hat deshalb 400 Elemente. Bei Aufspaltung der Zustandsgrößen auf  $\mathbf{z}_{ul}$  und  $\mathbf{z}_{al}$  ergeben sich die Matrizen  $\Phi_{\mathbf{z}_{ul}}$  mit 289 Elementen und  $\Phi_{\mathbf{z}_{al}}$  mit 9 Elementen. Insgesamt sind es also um  $2n_{z_a}n_{z_{al}} = 102$  weniger Elemente.

Zur Berechnung des Ortsvektors vom Radmittelpunkt wird die zweite Vorgehensweise gewählt, um die Gleichungen einfach zu halten. Die dritte Methode kommt dagegen bei der Auswertung der Drehbewegung zum Ansatz.

#### 4.6.4 Drehbewegung des Radträgers

Die rekursive Berechnung der Drehkinematik ist bei Verwendung natürlicher Koordinaten nicht ohne weiteres möglich. Dem verwendeten rekursiven MKS-Formalismus müssen die Daten zur Verfügung gestellt werden, die die Drehbewegung des Radträgers beschreiben. Dies betrifft die Drehmatrix  $\mathbf{A}_M$ , die Drehgeschwindigkeit  $\boldsymbol{\omega}_M$ , die Jacobimatrix der Rotation  $\mathbf{J}_{RM}$  und die lokale Drehbeschleunigung  $\overline{\boldsymbol{\alpha}}_M$ , d. h. der Anteil, der *nicht* von der zweiten Ableitung des Zustandsvektors  $\ddot{\mathbf{z}}_u$  abhängt (siehe Gleichungen (4.5e) und (4.5f)).

Beim Makrogeelenk in natürlichen Koordinaten kann die Berechnung der Drehkinematik in folgenden Schritten erfolgen:

- Es wird zuerst die Drehmatrix  $\mathbf{A}_M$  mittels der drei radträgerfesten Basispunkte  $C_1$ ,  $C_3$ ,  $C_5$  bestimmt, siehe Anhang B. Die Elemente  $A_{Mij}$ ,  $i, j = 1, 2, 3$ , der Drehmatrix sind die Koordinaten der Einheitsvektoren  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{k}$  vom durch die Basispunkte aufgespannten Koordinatensystem, vgl. (B.4).
- Es wird die *indirekte Aufgabe* gelöst, d. h. mittels der bekannten Drehmatrix  $\mathbf{A}_M$  werden die unbekannten Drehkoordinaten bestimmt, die in einem Vektor  $\mathbf{z}_{aD}$  zusammengefasst werden, siehe (B.6). Die explizite Darstellung von  $\mathbf{z}_{aD}$  wäre zwar vorteilhaft, kann aber je nach gewählten Drehkoordinaten sehr aufwendig werden, siehe z. B. [56, 61]. Durch die Wahl

$$\mathbf{z}_{aD} = [\mathbf{i}^T \quad \mathbf{j}^T \quad \mathbf{k}^T]^T = [A_{M11} \quad A_{M21} \quad A_{M31} \quad A_{M12} \quad \dots \quad A_{M33}]^T$$

entstehen neun implizite Zwangsbedingungen (siehe (B.4) und (B.5)),

$$\boldsymbol{\phi} := \mathbf{A}_M(\mathbf{z}_{aD}) - \mathbf{A}_{PQR}(\mathbf{z}_a, \mathbf{z}_u) = \mathbf{0}. \quad (4.59)$$

Die Aufgabe wird weiter, wie im Abschnitt 4.6.3 geschildert, durch Einführung des Zusatzvektors (4.56) gelöst, wobei  $\mathbf{z}_{al} = \mathbf{z}_{aD}$ . Für die erste und zweite Ableitung der Drehkoordinaten  $\dot{\mathbf{z}}_{aD}$ ,  $\ddot{\mathbf{z}}_{aD}$  wendet man (4.57) und (4.58) entsprechend an.

- Die Koordinaten von Drehgeschwindigkeit und -beschleunigung werden mittels ihrer schiefsymmetrischen Matrizen abgeleitet,

$$\tilde{\omega}_M = \dot{\mathbf{A}}_M \mathbf{A}_M^T$$

$$\tilde{\alpha}_M = \ddot{\mathbf{A}}_M \mathbf{A}_M^T + \dot{\mathbf{A}}_M \dot{\mathbf{A}}_M^T.$$

Für die Komponenten der Drehgeschwindigkeit  $\omega_M$  folgt daraus,

$$\omega_{Mx} = -(\dot{A}_{M21}A_{M31} + \dot{A}_{M22}A_{M32} + \dot{A}_{M23}A_{M33}), \quad (4.60a)$$

$$\omega_{My} = \dot{A}_{M11}A_{M31} + \dot{A}_{M12}A_{M32} + \dot{A}_{M13}A_{M33}, \quad (4.60b)$$

$$\omega_{Mz} = -(\dot{A}_{M11}A_{M21} + \dot{A}_{M12}A_{M22} + \dot{A}_{M13}A_{M23}). \quad (4.60c)$$

Durch einsetzen der Elemente von Matrizen  $\mathbf{A}_M$  und

$$\dot{\mathbf{A}}_M = \begin{bmatrix} \dot{z}_{aD1} & \dot{z}_{aD4} & \dot{z}_{aD7} \\ \dot{z}_{aD2} & \dot{z}_{aD5} & \dot{z}_{aD8} \\ \dot{z}_{aD3} & \dot{z}_{aD6} & \dot{z}_{aD9} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{ix}\dot{z}_u & J_{jx}\dot{z}_u & J_{kx}\dot{z}_u \\ J_{iy}\dot{z}_u & J_{jy}\dot{z}_u & J_{ky}\dot{z}_u \\ J_{iz}\dot{z}_u & J_{jz}\dot{z}_u & J_{kz}\dot{z}_u \end{bmatrix}$$

in (4.60) (siehe auch (B.9)) ergibt sich schließlich das Ergebnis

$$\omega_M = \begin{bmatrix} -(J_{iy}z_i + J_{jy}z_j + J_{ky}z_k) \\ J_{ix}z_i + J_{jx}z_j + J_{kx}z_k \\ -(J_{ix}y_i + J_{jx}y_j + J_{kx}y_k) \end{bmatrix} \dot{z}_u = \mathbf{J}_{RM} \dot{z}_u.$$

Der Term  $\bar{\alpha}_M$  ergibt sich in ähnlicher Weise,

$$\bar{\alpha}_M = \begin{bmatrix} -(\ddot{y}_i z_i + \ddot{y}_j z_j + \ddot{y}_k z_k + \dot{y}_i \dot{z}_i + \dot{y}_j \dot{z}_j + \dot{y}_k \dot{z}_k) \\ \ddot{x}_i z_i + \ddot{x}_j z_j + \ddot{x}_k z_k + \dot{x}_i \dot{z}_i + \dot{x}_j \dot{z}_j + \dot{x}_k \dot{z}_k \\ -(\ddot{x}_i y_i + \ddot{x}_j y_j + \ddot{x}_k y_k + \dot{x}_i \dot{y}_i + \dot{x}_j \dot{y}_j + \dot{x}_k \dot{y}_k) \end{bmatrix}.$$

Die Drehbewegung des Radträgers wird durch die Bewegung der drei Basispunkte  $C_1$ ,  $C_3$  und  $C_5$  eindeutig bestimmt. Um diesen Ansatz für alle Radaufhängungstypen verwenden zu können, müssen die Koordinaten dieser drei Punkte immer im Vektor der natürlichen Koordinaten auftreten.

#### 4.6.5 Federbein-Radaufhängung

Die Eigenart der Federbein-Radaufhängung (auch McPherson-Radaufhängung genannt, siehe Abbildung 4.9) besteht darin, dass das Federbein die Rolle der oberen Querlenker 5 und 6 übernimmt und dadurch zum Kinematikverhalten der Radaufhängung beiträgt. Als natürliche Koordinaten werden die Koordinaten der drei Basispunkte  $C_1$ ,  $C_3$  und  $C_5$ , die Koordinaten des Zusatzpunktes  $C_2$  und die Koordinaten eines Hilfspunktes  $H$ , insgesamt also fünfzehn Koordinaten gewählt. Der Punkt  $H$  liegt auf dem oberen Dämpferkörper in der Achse des Federbeins, die durch die Punkte  $D_B$  und  $D_C$  gegeben ist.

Für die drei Lenker 2, 4, 7 gelten die drei Zwangsbedingungen nach (4.51), für die drei Basispunkte  $C_1$ ,  $C_3$ ,  $C_5$  die drei Zwangsbedingungen nach (4.52) und für den Zusatzpunkt  $C_2$  des Radträgers weitere drei Zwangsbedingungen nach (4.53).



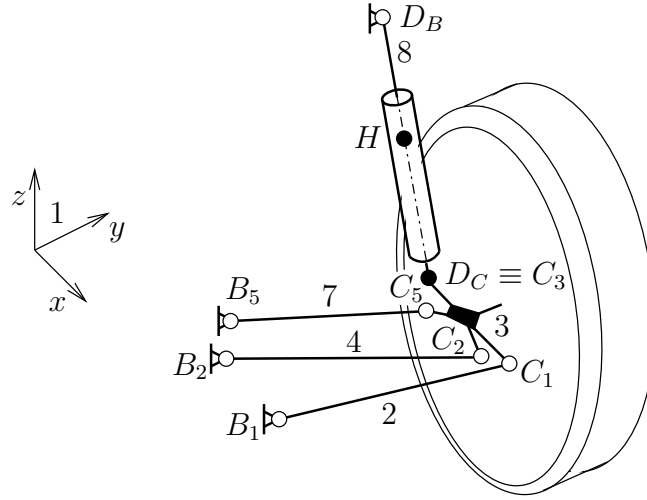


Abbildung 4.9: Kinematische Skizze der Federbein-Radaufhängung

Ausgehend davon, dass  $C_3 \equiv D_C$  gilt, wird die translatorisch-sphärische Bewegung des Federbeins durch folgende Bedingungen gewährleistet: Der Abstand zwischen den Punkten des oberen Dämpferkörpers  $H$  und  $D_B$  bleibt konstant,

$$\phi_{10} := \mathbf{r}_{D_B H}^T \mathbf{r}_{D_B H} - l_{D_B H}^2 = 0.$$

Die Vektoren  $\mathbf{r}_{D_B H}$  und  $\mathbf{r}_{D_B C_3}$  müssen kollinear bleiben. Da der Vektor  $\mathbf{r}_{D_B C_3}$  nicht konstant ist, würde die Bedingung für kollineare Vektoren (4.54) zu stark nichtlinearen Gleichungen führen ( $\kappa$  wird nicht konstant). Deswegen werden die nötigen Bedingungen mit Hilfe des Kreuzprodukts gewonnen,  $\tilde{\mathbf{r}}_{D_B H} \mathbf{r}_{D_B C_3} = 0$ . Aus den drei abhängigen Gleichungen müssen zwei unabhängigen Bedingungen ausgewählt werden, z. B.:

$$\phi_{11} := y_{D_B C_3} z_{D_B H} - z_{D_B C_3} y_{D_B H} = 0,$$

$$\phi_{12} := z_{D_B C_3} x_{D_B H} - x_{D_B C_3} z_{D_B H} = 0.$$

Die weiteren zwei Bedingungen müssen gewährleisten, dass die Winkel zwischen dem Vektor  $\mathbf{r}_{D_B H}$  und Vektoren  $\mathbf{r}_{C_1 C_3}$  und  $\mathbf{r}_{C_3 C_5}$  konstant bleiben,

$$\phi_{13} := \mathbf{r}_{D_B H}^T \mathbf{r}_{C_1 C_3} - |\mathbf{r}_{D_B H}| |\mathbf{r}_{C_1 C_3}| \cos \varphi_1 = 0,$$

$$\phi_{14} := \mathbf{r}_{D_B H}^T \mathbf{r}_{C_3 C_5} - |\mathbf{r}_{D_B H}| |\mathbf{r}_{C_3 C_5}| \cos \varphi_2 = 0.$$

Mit diesen vierzehn Zwangsbedingungen werden die vierzehn abhängigen natürlichen Koordinaten der Federbein-Radaufhängung bestimmt. Die Berechnung der translatorischen Bewegung als auch der Drehbewegung des Radträgers (Abschnitte 4.6.3 und 4.6.4) ändert sich nicht.

Man kann leicht erkennen, dass die Variablen in allen abgeleiteten Zwangsbedingungen linear oder höchstens quadratisch auftreten (siehe Beispiel 4.4). Die Anzahl der resultierenden Zwangsbedingungen ist allerdings höher als bei Verwendung von anderen Koordinatentypen (z. B. Relativkoordinaten).

Im Vergleich zum Makrogelenk mit den relativen Koordinaten haben die entstehenden kinematischen Gleichungen eine kompakte Form, die sehr transparent ist. Die Berechnung der Drehbewegung ist zwar komplizierter, dagegen muss aber keine rekursive Vorschrift verwendet werden, die alle entstehenden kinematischen Schleifen der Radaufhängung in Betracht zieht. Die Erweiterung der Palette aller bis jetzt behandelten Radaufhängungstypen auf neue Modelle ist deshalb leicht durchführbar. Dazu trägt auch die Tatsache bei, dass sich die Gelenktypen gängiger Radaufhängungen auf Kugel-, Dreh- und Schubgelenke beschränken. Von Vorteil ist weiterhin, dass die Anzahl der Eingangsparameter einzelner Radaufhängungen aufs Minimum reduziert wird, da nur die Koordinaten aller Punkte eingegeben werden müssen.

## 4.7 Kennfeldgelenk

Wie im Abschnitt 4.5 gezeigt, ist die Lösung der impliziten Zwangsbedingungen (4.36) problematisch, was die Genauigkeit der Ergebnisse (z. B., „Drift-off“) und die Effizienz der Ergebnisermittlung, Stichwort Iteration, angeht. Diese Probleme lassen sich vermeiden, indem man die Relativkinematik des Radträgergelenks direkt mittels unabhängiger Koordinaten ermittelt,  $\mathbf{r}_{g_3} = \mathbf{r}_{g_3}(\mathbf{z}_u)$ ,  $\mathbf{A}_{g_3} = \mathbf{A}_{g_3}(\mathbf{z}_u)$  bzw.

$$\mathbf{p}_3 = \mathbf{p}_3(\mathbf{z}_u), \quad (4.61)$$

wobei im Vektor  $\mathbf{p}_3$  je drei Längen- und Drehkoordinaten des Radträgers bezüglich Koordinatensystem in  $B_1$  auf dem Fahrzeugaufbau zusammengefasst werden (vgl. (4.33)),

$$\mathbf{p}_3 = [p_{3,1} \ p_{3,2} \ \dots \ p_{3,6}]^T = [x_{B_1R} \ y_{B_1R} \ z_{B_1R} \ \varphi_1 \ \varphi_2 \ \varphi_3]^T.$$

Wenn die Gleichung (4.61) nicht gegeben ist oder aber aus Effizienzgründen nicht sinnvoll eingesetzt werden kann, so können die Funktionen  $p_{3,i}(\mathbf{z}_u)$  mit  $i = 1, \dots, 6$  durch Spline-Funktionen  $\hat{p}_{3,i}(\mathbf{z}_u)$  ersetzt werden [13, Abschnitt 7.1.2.6.]. Diese oft verwendete Reduktionsmethode (siehe z. B. [1, 27, 45, 64, 65]) wird durch zweidimensionale Felder der Daten von  $p_{3,i}(\mathbf{z}_u)$  charakterisiert und deshalb im Weiteren *Kennfeldgelenk* genannt. An dieser Stelle sei die Methode nur kurz zusammengefasst.

Nach [13, Abschnitt 7.1.2.6.] wird eine Spline-Funktion  $S_k(x)$ , die eine Funktion  $f(x)$  ersetzt, auf einem Gitter der diskreten Stützwerte  $f_i$  aufgespannt, die in den Knoten  $x_i$ ,  $i = 1, \dots, n_x$ , definiert werden,  $f_i = f(x_i)$ . Die Spline-Funktion  $S_k(x)$  vom Grad  $k$  ist stückweise durch Polynome gegeben, die innerhalb einzelner Intervalle  $[x_i, x_{i+1}]$  definiert sind. Die Polynome (ebenfalls vom  $k$ -ten Grad) müssen an der Intervallgrenze  $k - 1$ -fach stetig differenzierbar sein. Dadurch bekommt man eine genäherte Lösung der gegebenen Funktion  $f(x)$  auch zwischen den Stützwerten  $f_i$ .

Eine Radaufhängung lässt sich mit Hilfe von höchstens zwei Freiheitsgraden ( $z_{u1}$ ,  $z_{u2}$ ) beschreiben. Die Spline-Funktionen  $\hat{p}_{3,i}$  lassen sich deshalb geometrisch als Flächen darstellen, Abbildung 4.10. Die Stützwerte  $p_{3,i,(\alpha,\beta)} = p_{3,i}(z_{u1(\alpha)}, z_{u2(\beta)})$  mit  $i = 1, \dots, 6$  werden durch die exakte Lösung der Gleichungen (4.61) in den gegebenen Knoten  $z_{u1(\alpha)}$ ,  $\alpha = 1, \dots, n_{z_{u1}}$ , und  $z_{u2(\beta)}$ ,  $\beta = 1, \dots, n_{z_{u2}}$ , festgelegt. Die für die Gelenkinematik ebenfalls benötigten Jacobimatrizen  $\mathbf{J}_{Tj}$ ,  $\mathbf{J}_{Rj}$  und die Terme  $\bar{\mathbf{v}}_{g_j}$ ,  $\bar{\mathbf{a}}_{g_j}$  (siehe Gleichungen (4.5)) werden näherungsweise aus den Ableitungen der Spline-Funktionen  $\hat{p}_{3,i}$  berechnet. Da die

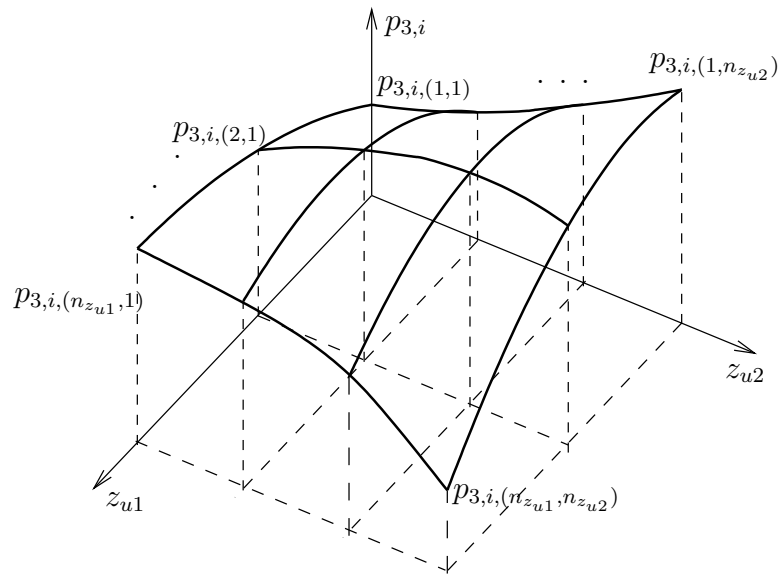


Abbildung 4.10: Graphische Darstellung der bi-kubischen Spline-Funktion  $\hat{p}_{3,i}$

Funktionen  $p_{3,i}(z_u)$  durch bi-kubische Spline-Funktionen ( $k = 3$ ) in beide Richtungen interpoliert werden, ist gewährleistet, dass auch die Ableitungen  $\hat{p}_{3,i}$  und  $\ddot{p}_{3,i}$  stetig sind.

Wenn die Relativkinematik des Radträgergelenks direkt für den Radmittelpunkt  $M$  definiert wird,  $R \equiv M$ , stimmt der Radhub  $z_{u1}$  mit der Vertikalkoordinate  $z_M$  überein:  $p_{3,3} = z_{B_1M} = z_{u1}$ . Dadurch wird die Anzahl der benötigten Spline-Funktionen auf fünf reduziert.

Die interpolierenden Spline-Funktionen geben an den diskreten Stützwerten  $p_{3,i}(\alpha, \beta)$  die genauen Werte der Funktion  $p_{3,i}$  wieder. Alternativ wäre auch eine Approximation gegebener Stützwerte möglich, diese ist aber nur dann sinnvoll, wenn es sich um gemessene Daten handelt, die mit Messfehlern behaftet sind. Die Genauigkeit des resultierenden Ersatzmodells ist von der Interpolationsgüte abhängig. Höhere Anforderungen an die Genauigkeit der Interpolation lassen sich mit einer erhöhten Zahl der Stützwerte erreichen. Mit Einführung von (4.61) liegt denn der wesentliche Bestandteil dieser Reduktionsmethode darin, die Spline-Funktionen möglichst effizient zu evaluieren.

Um die entsprechenden Stützwerte zu bekommen, muss man eine Bewegungsanalyse der Radaufhängung durchführen. Diese Bewegungsanalyse kann entweder virtuell mit Hilfe von Simulation oder aber auch experimentell auf einem Prüfstand erfolgen. Dann ist allerdings die Daten-Approximation anstatt Interpolation vorzuziehen.

Der Nachteil dieser Reduktionsmethode liegt daher darin, dass man die Bewegungsanalyse immer dann neu durchführen muss, wenn die Struktur oder nur die Parameter der Radaufhängung geändert werden. Vorteilhaft ist diese Methode dagegen bei einer Modellweitergabe, da man die Daten der Radaufhängung nicht bekannt geben muss.

## 4.8 Vereinfachung der Elastokinematik

Wenn sich die Kräfte zwischen Reifen und Fahrbahn ändern, kommt es zu einer Bewegung des Rades, die durch Nachgiebigkeiten der einzelnen Gummilager und der Körper der Radaufhängung inklusive Zwischenrahmen (Fahrschemel) hervorgerufen wird. Auf Grund dieser Bewegung ändert sich die aktuelle Lage der Radaufhängung (vgl. (4.61)):

$$\mathbf{p}_3 = \mathbf{p}_3(\mathbf{z}_u, \mathbf{h}), \quad (4.62)$$

mit dem Vektor  $\mathbf{h}$ , der alle auf die Radaufhängung wirkenden Kräfte  $f_i$  und Momente  $l_i$  zusammenfasst

$$\mathbf{h} = [f_x \quad f_y \quad f_z \quad l_x \quad l_y \quad l_z]^T = [h_1 \quad h_2 \quad \dots \quad h_6]^T.$$

Die Änderung der Radstellung auf Grund der wirkenden Kräfte  $\mathbf{h}$  nennt man Elastokinematik.

Eine umfassende Beschreibung der Elastokinematik ist in [44] zu finden, manche Aspekte, insbesondere hinsichtlich des Fahrverhaltes, werden auch in [69] besprochen. Während die Modellierung der Radaufhängungs kinematik für Echtzeitsimulationen unabdingbar ist, wird die Elastokinematik der Radaufhängung vergleichsweise selten berücksichtigt. Zu den größten Schwierigkeiten gehören die Beschaffung der nötigen Daten von elastischen Gummilagern und hinsichtlich des Integrationsverfahrens eventuelle Instabilität des Gesamtsystems und die hochfrequenten Schwingungen, die auf Grund hoher Lagersteifigkeit auftreten, siehe auch [58].

### 4.8.1 Zentralisierte Elastizität

Die vereinfachenden Gleichungen, die im Rahmen dieser Arbeit für die Elastokinematik abgeleitet werden, basieren auf der Idee der *zentralisierten Elastizität* [53, 66]. Das Konzept der zentralisierten Elastizität geht von der Annahme aus, dass sich die kinematischen und die elastokinematischen Lösungsanteile bei der Lageberechnung des Radträgers getrennt behandeln lassen. Für die kinematische Lösung können die bereits beschriebenen Methoden (Abschnitte 4.5 und 4.6) angewendet werden. Der elastokinematische Anteil kann unabhängig davon weiter verarbeitet und vereinfacht werden.

Man kann die getrennten Lösungen so interpretieren, dass es sich um einen Radträger handelt, der in zwei Teilkörper aufgeteilt ist. Die Bewegung des ersten Teilkörpers  $k$  ergibt sich, wenn die Lagerelemente der Radaufhängung als ideale Gelenke ohne Nachgiebigkeiten betrachtet werden. Zur Bestimmung der Bewegung dieses Körpers  $k$  können z. B. die Methoden nach Abschnitten 4.5, 4.6 oder 4.7 herangezogen werden. Die Bewegung des zweiten Teilkörpers  $e$  bekommt man als eine zusätzliche Lageänderung des Radträgers bezüglich Körper  $k$ , die sich wegen der diesmal elastischen Lagerung auf Grund der wirkenden Kräfte  $\mathbf{h}$  ergibt, siehe Abbildung 4.11. Die Gelenkkinematik des Radträgers ist nun

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{g3} &= \mathbf{r}_{B_1 R} = \mathbf{r}_{B_1 R_k}(\mathbf{z}_u) + \mathbf{r}_{R_k R_e}(\mathbf{z}_{ue}), \\ \mathbf{A}_{g3} &= \mathbf{A}_{B_1 R} = \mathbf{A}_{B_1 R_k}(\mathbf{z}_u) \mathbf{A}_{R_k R_e}(\mathbf{z}_{ue}). \end{aligned}$$

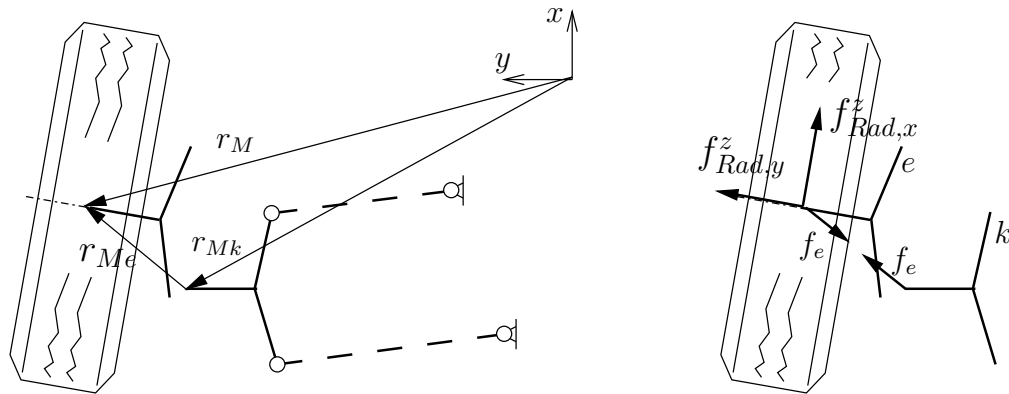


Abbildung 4.11: Ansatz der zentralisierten Elastizität: Der Ortsvektor (links) und die Kräfte (rechts)

Die unabhängigen Koordinaten  $\mathbf{z}_{ue}$  entsprechen den Freiheitsgraden des Körpers  $e$  gegenüber Körper  $k$ .

Die dynamischen Bewegungsgleichungen dieser zwei Körper in der Zustandsform (siehe (2.2)) lauten

$$\dot{\mathbf{x}}_k = \mathbf{g}_k(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_e, t), \quad (4.63a)$$

$$\dot{\mathbf{x}}_e = \mathbf{g}_e(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_e, t), \quad (4.63b)$$

wobei der Vektor  $\mathbf{x}_e^T = [\mathbf{z}_{ue}^T \quad \dot{\mathbf{z}}_{ue}^T]$  alle Zustandsgrößen des Körpers  $e$  zusammenfasst. Die rechten Seiten der Gleichungen beinhalten u. a. das Kraftgesetz der zentralisierten Elastizität, das die Elastizitäten und Nachgiebigkeiten aller Radaufhängungselemente zusammenfasst und das in allen freien Richtungen des Körpers  $e$  (relativ zum Körper  $k$ ) wirkt.

Wegen der hohen Gesamtsteifigkeit der Radaufhängung weist der Körper  $e$  hochfrequente Übergangsschwingungen mit kleinen Amplituden auf. Nach dem in der Regelungstechnik verbreiteten Verfahren der *singulären Störungsrechnung* [33, 43], das zur Ordnungsreduktion des Systems, d. h. zur Verringerung der Anzahl der Zustandsvariablen verwendet wird, wird der Zustandsvektor  $\mathbf{x}_k$  dem langsamen und der Zustandsvektor  $\mathbf{x}_e$  dem schnellen Teilsystem zugeordnet. Die Gleichungen (4.63) führt man deshalb über zu

$$\dot{\mathbf{x}}_k = \mathbf{g}_k(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_e, t),$$

$$\epsilon \dot{\mathbf{x}}_e = \mathbf{g}_e(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_e, t)$$

mit dem dominanten langsamen Teilsystem der Koordinaten  $\mathbf{x}_k$ , dem schnellen Teilsystem der Koordinaten  $\mathbf{x}_e$  und mit dem kleinen Wert  $\epsilon$ . Da die Übergangsvorgänge des Körpers  $e$  (d. h. hochfrequente Schwingung des schnellen Teilsystems mit kleinen Amplituden) von geringer Bedeutung für das Fahrverhalten des Fahrzeugs sind, vernachlässigt man diesen Lösungsanteil, indem man  $\epsilon = 0$  setzt, und man bekommt ein System differentiell-algebraischer Gleichungen

$$\dot{\mathbf{x}}_k = \mathbf{g}_k(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_e, t), \quad (4.64a)$$

$$\mathbf{0} = \mathbf{g}_e(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_e, t). \quad (4.64b)$$

Von der Bewegung des Körpers  $e$  wird damit nur der quasi-stationäre Anteil (engl.: quasi-steady-state Model [33]) berücksichtigt.

Die zentralisierte Elastizität ist im Allgemeinen durch drei translatorische und drei rotatorische Feder/Dämpfer-Elemente jeweils in  $x$ -,  $y$ - und  $z$ -Richtung dargestellt. Mit der Vernachlässigung des Vektors  $\dot{\mathbf{x}}_e$  bleiben nicht nur die Beschleunigungen  $\ddot{\mathbf{z}}_{ue}$ , sondern auch die Geschwindigkeiten  $\dot{\mathbf{z}}_{ue}$  des Körpers  $e$  unberücksichtigt. Deswegen werden auch die Dämpfungseigenschaften der Gummilager vernachlässigt und die zentralisierte Elastizität lässt sich als eine diskrete Feder auffassen. Dass die kompliziert zu bestimmenden Dämpfungsgrößen der Gummilager nicht mehr erforderlich sind, ist einer der Vorteile dieser Betrachtungsweise.

### 4.8.2 Bewegungsgleichungen des Radträgers

Impuls- und Drallsatz angewandt auf die Körper  $k$  und  $e$  ergeben

$$m_k \mathbf{a}_{Ik} = \mathbf{f}_k^r + \mathbf{f}_k^e + \mathbf{f}_e^r + \mathbf{f}_e^e, \quad (4.65a)$$

$$\mathbf{I}_k \boldsymbol{\alpha}_{Ik} + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{Ik} \mathbf{I}_k \boldsymbol{\omega}_{Ik} = \mathbf{l}_k^r + \mathbf{l}_k^e + \mathbf{l}_e^r + \mathbf{l}_e^e \quad (4.65b)$$

und

$$m_e \mathbf{a}_{Ie} = -\mathbf{f}_e^r - \mathbf{f}_e^e + \mathbf{f}_{Rad}^r, \quad (4.65c)$$

$$\mathbf{I}_e \boldsymbol{\alpha}_{Ie} + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{Ie} \mathbf{I}_e \boldsymbol{\omega}_{Ie} = -\mathbf{l}_e^r - \mathbf{l}_e^e + \mathbf{l}_{Rad}^r. \quad (4.65d)$$

Dabei ist  $m$  die Masse und  $\mathbf{I}$  der Trägheitstensor des Körpers.  $\mathbf{f}^r$  und  $\mathbf{l}^r$  bzw.  $\mathbf{f}^e$  und  $\mathbf{l}^e$  sind die Reaktionskräfte und -momente bzw. eingeprägte Kräfte und Momente. Die unteren Indizes beziehen sich jeweils auf den Körper  $k$  bzw.  $e$ .

Wendet man (4.64) auf die Bewegungsgleichungen (4.65) an, dann ergibt sich aus (4.65c) und (4.65d) der quasi-stationäre Anteil der Bewegung des Körpers  $e$ :

$$\mathbf{0} = -\mathbf{f}_e^r - \mathbf{f}_e^e + \mathbf{f}_{Rad}^r,$$

$$\mathbf{0} = -\mathbf{l}_e^r - \mathbf{l}_e^e + \mathbf{l}_{Rad}^r,$$

was man in einer Vektorgleichung zusammenfasst:

$$\mathbf{0} = -\mathbf{h}_e^r - \mathbf{h}_e^e(\mathbf{z}_{ue}) + \mathbf{h}_{Rad}^r. \quad (4.66)$$

Die Masse  $m_3$  und der Trägheitstensor  $\mathbf{I}_3$  des Radträgers 3 werden dann dem Körper  $k$  zugeordnet,  $m_k = m_3$ ,  $\mathbf{I}_k = \mathbf{I}_3$ .

In den durch  $\mathbf{z}_{ue}$  gegebenen freien Richtungen des Körpers  $e$  wirkt das Federelement  $\mathbf{h}_e^e$  der zentralisierten Elastizität, in den gesperrten Richtungen treten dagegen die Zwangskräfte  $\mathbf{h}_e^r$  auf. Da wegen der Orthogonalität der freien und gesperrten Richtungen auch die Vektoren  $\mathbf{h}_e^e$  und  $\mathbf{h}_e^r$  orthogonal sind, kann man (4.66) auf

$$\mathbf{0} = -\mathbf{h}_e^r + \mathbf{h}_{Rad}^r,$$

$$\mathbf{0} = -\mathbf{h}_e^e + \mathbf{h}_{Rad}^r \quad (4.67)$$

aufteilen. Für die Berechnung von  $\mathbf{z}_{ue}$  ist nur noch die Gleichung (4.67) von Bedeutung.

Das System differentiell-algebraischer Gleichungen (4.65a), (4.65b) und (4.67) muss bei der offline Simulation iterativ gelöst werden. Die Iteration wird bei der Echtzeitsimulation dadurch umgangen, dass die aus dem letzten Integrationsschritt vorgeschlagenen Startwerte  $\mathbf{z}_{ue}^{(old)}$  für die Kinematikauswertung im aktuellen Integrationsschritt verwendet werden und auf die iterativen Korrektionschritte verzichtet wird. Die Startwerte  $\mathbf{z}_{ue}^{(new)}$  für den nächsten Integrationsschritt werden mit bekanntem Vektor  $\mathbf{h}_{Rad}^r$  durch (4.67) gegeben.

Die Gleichung (4.67) wird in der Praxis in der expliziten Form gegeben,

$$\mathbf{z}_{ue} = \mathbf{z}_{ue}(\mathbf{h}_{Rad}^r).$$

Dies definiert die Abhängigkeit der Radstellungsänderung von den auf das Rad wirkenden Kräften und Momenten, die z. B. in einem Prüfstand ermittelt wird.





# Kapitel 5

## Vergleichende Bewertung und Ergebnisse

Dieses Kapitel befasst sich mit dem Vergleich und Bewertung der bisher beschriebenen Methoden auf der Grundlage entsprechend geeigneter Simulationsszenarien und den daraus resultierenden Ergebnissen. Nach einem einführenden Abschnitt über die numerische Integration werden zwei Beispielmmodelle untersucht: Die Raumlener-Radaufhängung und ein PKW-Modell. Um die unterschiedlichen Modellierungstechniken zu vergleichen, werden die im Kapitel 4 angeführten Methoden auf das erste Modell angewendet. Für das Gesamtfahrzeugmodell werden dann nur ausgewählte Reduktionsmethoden angesetzt. Ziel ist es, die resultierenden Unterschiede in den Simulationsergebnissen an Hand verschiedener Fahrmanöver aufzuzeigen.

### 5.1 Numerische Integration

In diesem Abschnitt werden die im Weiteren zur Simulation eingesetzten numerischen Integrationsverfahren kurz beschrieben. Dabei kann es sich allein schon aus Platzgründen nicht um eine ausführliche Beschreibung der heutzutage für die Echtzeitsimulation im Bereich der Fahrzeugdynamik verwendeten Integrationsverfahren handeln. Ausführlich behandelt werden Integrationsverfahren z. B. in [3], auf die besonderen Aspekte diesbezüglicher Echtzeitanforderungen wird u. a. in [22, 24, 49] eingegangen.

Die Bewegungsgleichungen von Mehrkörpersystemen führen oftmals auf differentiell-algebraische Gleichungen der Form (2.4); dies ist z. B. auch bei allen Referenzmodellen der nachfolgenden Simulationsbeispiele der Fall. Zur Lösung solcher nichtlinearen Gleichungssysteme werden in der Regel implizite numerische Integrationsverfahren angewendet. Grundgedanke jeglicher numerischen Zeitintegrationsverfahren ist es, die Bewegungsgleichungen zu diskretisieren und den diskreten Zustandsvektor  $\mathbf{x}_n$  zu diskreten Zeitpunkten  $t_n$  mit  $t_n = t_{n-1} + h_n$  zu ermitteln;  $h_n$  beschreibt dabei die (aktuelle) Schrittweite der Integration. Die impliziten Integrationsverfahren benötigen jedoch in jedem Zeitschritt  $t_{n-1} \rightarrow t_n$  eine iterative Lösung der diskretisierten nichtlinearen Bewegungsgleichungen. Da die Auswertung der nichtlinearen Bewegungsgleichungen insbesondere im Fall eines allgemeinen MKS-Algorithmus in der Regel relativ zeitaufwendig ist, versucht man durch eine geeignete Schrittweitensteuerung trotz möglichst großer Schrittweiten  $h_n$ , wodurch

die Anzahl der Auswertungen während der Integration möglichst gering gehalten wird, vorgegebene Fehlertoleranzen einzuhalten. Die Schrittweite wird dabei auf der Basis der aktuellen Genauigkeit der diskreten Lösung gesteuert.

In die diskreten Bewegungsgleichungen geht im Falle von Einschrittverfahren das Ergebnis des letzten Integrationsschrittes ein, bei Mehrschrittverfahren werden hingegen Informationen über die Lösungen  $\mathbf{x}_{n-j}$  in den vorherigen Schritten  $t_{n-j}$ ,  $j = 1, \dots, s$ , genutzt. Da Mehrschrittverfahren in der Regel weniger Auswertungen der Bewegungsgleichungen als Einschrittverfahren benötigen, sind sie bei offline Simulation vorzuziehen. In den nachfolgenden Simulationen wird der implizite Mehrschrittalgorithmus DASSL ([12]) bzw. seine in SIMPACK implementierte Modifikation SODASRT eingesetzt. Gegenüber DASSL kann SODASRT z. B. auch zur Berechnung überbestimmter differentiell-algebraischer Gleichungssysteme bei gleichzeitiger Berücksichtigung der Unstetigkeiten verwendet werden.

Da sich die Anzahl der benötigten Aufrufe der Bewegungsgleichungen (2.2) oder (2.4) bei den impliziten Integrationsverfahren nicht vorab abschätzen lässt, werden für die Echtzeitsimulation explizite oder semi-explizite Integrationsverfahren bevorzugt, siehe z. B. [2, 4, 7, 15, 29, 55]. Diese Verfahren benötigen keine interne Iteration eines nichtlinearen Gleichungssystems und die Anzahl solcher Auswertungen pro Zeitschritt ist somit fest vorgegeben. Da sich gewöhnliche Differentialgleichungssysteme numerisch wesentlich einfacher lösen lassen, ist es für eine Echtzeitsimulation vorteilhaft, die Bewegungsgleichungen in der Form (2.2) als System gewöhnlicher Differentialgleichungen bereitzustellen. Dies wird in der Praxis entweder durch eine veränderte Modellierung (händische Modellreduktion), durch spezielle Formalismen oder durch spezielle, formalismusunabhängige Reduktionen erreicht. Im Rahmen dieser Arbeit wird hauptsächlich der letztgenannte Weg verfolgt.

Ein bedeutender Nachteil expliziter Integrationsverfahren ist, dass die numerische Lösung wegen der so genannten Steifheit der Gleichungen instabil werden kann. Ein Phänomen, das in der Fahrzeugdynamik häufig auftritt, z. B. bei Verwendung bestimmter Reifenmodelle. Daraus resultiert dann das folgende Dilemma: Einerseits weisen implizite Integrationsverfahren zwar die besseren Stabilitätseigenschaften auf, andererseits weisen diese jedoch auf Grund der internen Iterationen einen nicht vorhersehbaren Rechenaufwand auf. Ein Ausweg wäre zwar, die maximal zulässige Anzahl an Iterationsschritten pro Integrationsschritt zu begrenzen, damit ist aber dann der Integrationsfehler vollständig unbestimmt. Ein anderer Ausweg wäre es, bei einem expliziten Integrationsverfahren die Schrittweiten  $h_n$  sehr klein zu wählen, wodurch auch diese Verfahren in der Regel eine numerisch stabile Lösung gewährleisten. Gerade im Bereich der Echtzeitsimulation der Fahrzeugmodelle ist letztgenannte Vorgehensweise oftmals sinnvoll, da insbesondere wegen den hohen Abtastraten elektronischer Fahrzeugsysteme aktiver Sicherheit Schrittweiten  $h_n$  zwischen 1 und 5 ms gewählt werden müssen. Um die Anforderungen an die Echtzeitfähigkeit des Fahrzeugmodells zu erfüllen, kann man aber eventuell auch die steifen und nicht-steifen Baugruppen getrennt mit unterschiedlichen Schrittweiten lösen [1]. Im Gegensatz zur offline Simulation sind bei der Echtzeitsimulation Einschrittverfahren vorzuziehen, insbesondere z. B. bei Berücksichtigung von Fahrbahnunstetigkeiten oder bei einer zu erwartenden starken Änderung des Lösungsverhalten.

Um die Rechenzeiten einzelner Modellvarianten anschaulich vergleichen zu können wird im Rahmen der vorliegenden Arbeit bei einigen Simulationen der einfachste Vertre-

ter der Einschrittverfahren – das explizite Euler-Verfahren – an (2.2) angewendet. Die Berechnungsvorschrift dieses Verfahrens lautet:

$$\mathbf{x}_n = \mathbf{x}_{n-1} + h\mathbf{g}(\mathbf{x}_{n-1}, t_{n-1}). \quad (5.1)$$

Die Schrittweite  $h$  ist dabei konstant für das ganze Simulationsintervall, die Bewegungsgleichungen müssen pro Zeitschritt nur einmal ausgewertet werden.

## 5.2 Beispiel Raumlener-Radaufhängung

Die Methoden zur Reduktion des Mehrkörpermodells werden am Beispiel der Raumlener-Radaufhängung (bezeichnet auch als Fünflenker-Radaufhängung, siehe Abbildung 5.1) demonstriert. Die Daten dieser Radaufhängung entstammen einem Radaufhängungsbeispiel nach [38] und sind im Anhang C zusammengefasst.

### 5.2.1 Modellbeschreibung

Die fünf Lenker  $i$  werden mit je zwei Kugelgelenken  $B_i$  bzw.  $C_i$ ,  $i = 2, 4, 5, 6, 7$ , an den Aufbau 1 bzw. an den Radträger 3 gebunden. Das Rad ist mit dem Radträger fest verbunden. Zur Federung wird ein parallel wirkendes lineares Feder/Dämpfer-Element verwendet. Dieses Element wirkt ebenfalls zwischen dem Aufbau und dem Radträger. Der Reifen wird einfach durch eine lineare Feder zwischen dem Radmittelpunkt  $M$  und der Straße modelliert. Die Länge des entspannten Feder/Dämpfer-Elements und die Länge der unbelasteten Reifenfeder muss für jedes Modell so festgelegt werden, dass sich das System in der vorgegebenen Nominallage im Gleichgewicht befindet.

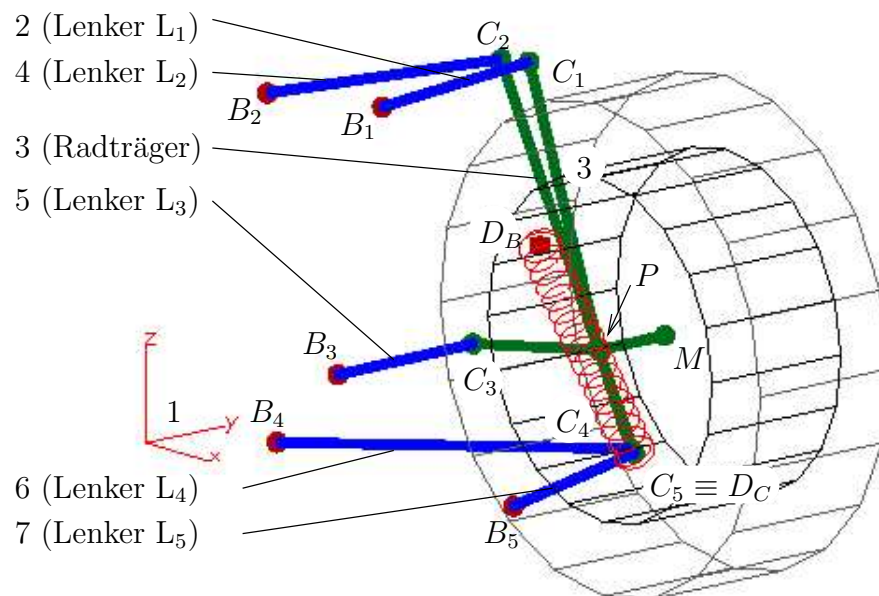


Abbildung 5.1: Skizze der Raumlener-Radaufhängung

Das untersuchte Modell wird als „Viertel-Fahrzeug“ modelliert, d. h. das Modell besteht lediglich aus einer Radaufhängung und einem Viertel des Fahrzeugaufbaus. Da der Aufbaukörper nur vertikale translatorische Bewegung ausüben kann, haben die Trägheits- und Deviationsmomente des Aufbaus keine Bedeutung und müssen deswegen nicht berücksichtigt werden. Insgesamt werden in der untersuchten Radaufhängung folgende Änderungen gegenüber Originalmodell (siehe [38]) vorgenommen: Es werden Trägheitsmomente aller Lenker berücksichtigt, Fahrzeugaufbau wird massebehaftet betrachtet und Federung wird am Radträger und nicht am Lenker 7 angebracht.

### 5.2.2 Modellvarianten

Das Referenzmodell für die folgenden Berechnungen ist die vollmodellierte Radaufhängung mit allen Körpern, bezeichnet als `5link_ref` in Tabelle 5.1. Das Modell `5link_table` unterscheidet sich dadurch von diesem Referenzmodell, dass die Radaufhängung Abschnitt 4.7 folgend durch die diskretisierten Lagebedingungen nachvollzogen wird. In Modellvariante `5link_macro` wird das Radaufhängungsmodell mittels Makrogelenk in Relativkoordinaten vereinfacht (siehe Abschnitt 4.5), die abhängigen Koordinaten  $\mathbf{z}_a$  werden dabei durch Integration berechnet und mit dem Baumgarte-Verfahren nach Gleichung (4.41) stabilisiert. Mit `5link_natco` ist diejenige Modellvariante bezeichnet, bei der die Radaufhängungskinetik gemäß Abschnitt 4.6 durch Makrogelenk in natürlichen Koordinaten beschrieben ist, wobei die nichtlinearen Lagebedingungen entweder iterativ gelöst (Abschnitt 4.5.3 auf Seite 51) oder direkt durch die Integration mit stabilisierter Lösung (Abschnitt 4.5.3 auf Seite 51) gewonnen werden. Außerdem wird ein weiteres Modell mit diskretisierten Lagebedingungen zur Beschreibung der Radaufhängung untersucht, bei dem jedoch die Massengrößen der Lenker dem Aufbau und dem Radträger zugeschlagen werden. Dieses Modell ist in Tabelle 5.1 unter Bezeichnung `5link_table_subst` zu finden.

Dieser Massenausgleich beschränkt sich auf die Massen der Lenker, deren Trägheitsmomente bereits im Referenzmodell sehr gering sind und deswegen nicht umgerechnet werden. Ein anderer Anwendungsfall eines solchen Massenausgleichs wäre z. B. bei der Berechnung der Dynamik von Verbrennungsmotoren das Ersatzmodell des Kurbeltriebes, siehe z. B. [61].

Die Masse jedes Lenkers  $L_i$  der Radaufhängung,  $i = 1, \dots, 5$ , wird hierbei zunächst auf eine Ersatzmasse  $m_{B_i}$  bzw.  $m_{C_i}$  in jedem der beiden Koppelpunkte eines Lenkers verteilt. Die Aufteilung muss dabei

$$\begin{aligned} m_i &= m_{B_i} + m_{C_i}, \\ m_i \mathbf{r}_{S_{L_i}} &= m_{B_i} \mathbf{r}_{B_i} + m_{C_i} \mathbf{r}_{C_i} \end{aligned}$$

für alle  $i$ ,  $i = 1, \dots, 5$ , erfüllen, wobei  $\mathbf{r}_{S_{L_i}}$  den Radiusvektor des Massenmittelpunkts  $S_{L_i}$  des  $i$ -ten Lenkers bezeichnet. Für die bekannten Punkte  $B_i$ ,  $C_i$  folgt daraus

$$\begin{aligned} m_{B_i} &= \frac{|\mathbf{r}_{S_i C_i}|}{l_{B_i C_i}} m_i, \\ m_{C_i} &= \frac{|\mathbf{r}_{S_i B_i}|}{l_{B_i C_i}} m_i \quad \text{bzw.} \quad m_{C_i} = m_i - m_{B_i}, \end{aligned}$$

wobei  $m_{B_i}$ ,  $m_{C_i}$  die Ersatzmasse des Lenkers  $L_i$  im Koppelpunkt  $B_i$ ,  $C_i$  beschreibt,  $l_{B_i C_i}$  ist dann die Länge des Lenkers.

Tabelle 5.1: Übersicht der Modellvarianten von der Raumlenker-Radaufhängung

Bezeichnung	Beschreibung	Abschnitt
5link_ref	Vollmodellierte Radaufhängung	
5link_table	Kennfeldgelenk-Ansatz	4.7
5link_table_subst	Wie 5link_table aber mit Massenersatz der Lenker	4.7
5link_macro	Makrogelenk-Ansatz mit Relativkoordinaten, $\mathbf{z}_a$ berechnet mittels Integration von $\dot{\mathbf{z}}_a$ und stabilisiert mit Baumgarte-Verfahren	4.5
5link_natco_*	Makrogelenk-Ansatz mit natürlichen Koordinaten,	4.6
* := iter	$\mathbf{z}_a$ als iterative Lösung von $\phi$ , $\Phi_{\mathbf{z}_a}$ numerisch	4.5.3, S. 51
* := iter_a	Wie 5link_natco_iter, aber $\Phi_{\mathbf{z}_a}$ analytisch vorgegeben	4.5.3, S. 51
* := proj	$\mathbf{z}_a$ als projizierte Lösung der Integration von $\dot{\mathbf{z}}_a$	4.5.3, S. 51
* := baumgte	$\mathbf{z}_a$ berechnet mittels Integration von $\dot{\mathbf{z}}_a$ und stabilisiert mit Baumgarte-Verfahren	4.5.3, S. 51

Durch das Hinzufügen der Ersatzmassen zum Aufbau 1 (über alle Koppelpunkte  $B_i$ ) und Radträger 3 (über alle Koppelpunkte  $C_i$ ) ändern sich Masse  $m_i$ , Schwerpunktlage  $\mathbf{r}_{S_i}$  und Trägheitstensor  $\mathbf{I}_i$ ,  $i = 1, 3$ , dieser Körper. Die nötigen Umrechnungen werden im Folgenden für den Radträger angeführt, gelten aber entsprechend auch für den Fahrzeugaufbau. Für die neue Gesamtmasse  $\bar{m}_3$  des Radträgers 3 gilt

$$\bar{m}_3 = m_3 + \sum_{i=1}^5 m_{C_i},$$

wobei  $m_3$  die ursprüngliche Masse des Radträgers bezeichnet. Die neue Lage  $\bar{\mathbf{r}}_{S_3}$  des Schwerpunktes des Radträgers ergibt sich aus dem Gleichgewicht der statischen Momente aller materiellen Punkte eines Körpers (siehe z. B.) als

$$\bar{\mathbf{r}}_{S_3} = \frac{1}{\bar{m}_3} (m_3 \mathbf{r}_{S_3} + \sum_{i=1}^5 m_{C_i} \mathbf{r}_{C_i}).$$

Daneben muss noch der Trägheitstensor der Massengeometrie des Körpers entsprechen,  $\bar{\mathbf{I}} = \int \tilde{\mathbf{r}}^T \tilde{\mathbf{r}} dm$ . Damit errechnet man den angepassten Trägheitstensor  ${}_3\bar{\mathbf{I}}_3$  im radträgerfesten Koordinatensystem  $\underline{\mathbf{e}}_3$  zu

$${}_3\bar{\mathbf{I}}_3 = {}_3\mathbf{I}_3 + \sum_{i=1}^5 (\mathbf{r}_{S_3 C_i}^T \mathbf{r}_{S_3 C_i} \mathbf{E} - \mathbf{r}_{S_3 C_i} \mathbf{r}_{S_3 C_i}^T) m_{C_i}.$$

### 5.2.3 Simulationsszenarien

Das Viertel-Fahrzeug Modell wird in zwei Simulationsszenarien untersucht. Im ersten Simulationsszenario wird das Modell am Radaufstandspunkt  $A$  in vertikaler Richtung

mit einem harmonischen Signal erregt. Als Ergebnis wird das Amplitudenspektrum des Fahrzeugaufbaus in vertikaler Richtung bei einer Anregungsfrequenz von  $f = 0,4$  Hz bis  $f = 20$  Hz und mit einer konstanten Anregungsamplitude von  $A_{Az} = 0,005$  m beobachtet, d. h. die Anregungsfrequenz wird im Frequenzbereich der erwarteten Eigenfrequenzen des Modells gewählt.

Diese Anregungsfrequenz  $f$  wird in einer sequentiellen Schleife so lange konstant gehalten, bis sich das System in einem eingeschwungenen Zustand befindet. Erst dann wird eine Fouriertransformation des eingeschwungenen Ausgangssignals (FFT-Analyse) durchgeführt, wobei die Amplitude der ersten harmonischen Schwingung auf Lageebene ausgewertet wird.

Um die Rechenzeiten zu vergleichen und das Modell in einem größeren Bewegungsbereich zu untersuchen, wird das zweite Simulationsszenario definiert. In diesem Fall wird das Modell ebenfalls im Radaufstandspunkt  $A$  in vertikaler Richtung mit einem vordefinierten quasi-stochastischen Signal, dargestellt in Abbildung 5.2, erregt. Dieses Anregungssignal ergibt sich als „schlechte unbefestigte Straße“ (engl.: bad unfortified road) aus der SIMPACK-Bibliothek der Polynomfunktionen, siehe [72]. Beobachtet wird die absolute Bewegung des Radträgers während der Simulationszeit  $T_{sim} = 20$  s.

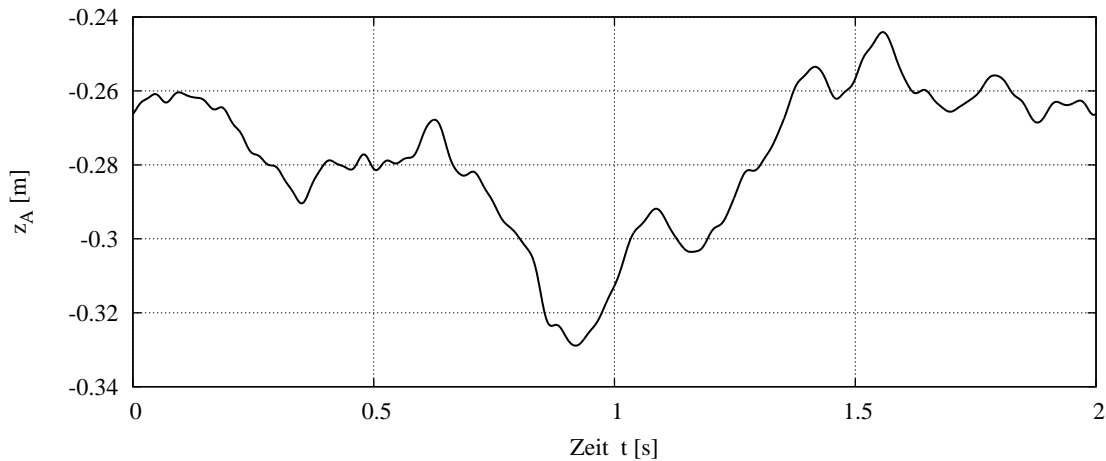


Abbildung 5.2: Periodisches Anregungssignal (nur eine Periode dargestellt)

#### 5.2.4 Bewertung der Simulation

Die Ergebnisse der unterschiedlichen Modellvarianten sind für das erste Simulationsszenario in den Abbildungen 5.3 und 5.4 zu sehen. Verglichen wird das Amplitudenverhältnis  $A_{B_z}/A_{A_z}$ ; dabei ist  $A_{B_z}$  die Amplitude der ersten harmonischen Schwingung der Vertikalbewegung des Fahrzeugaufbaus (Ausgangssignal), die Amplitude der Vertikalerregung im Radaufstandspunkt (Eingangssignal) wird mit  $A_{A_z}$  bezeichnet. Die beiden deutlich ausgeprägten Resonanzfrequenzen des Modells liegen bei  $f_1 \approx 0,69$  Hz für gedämpfte Massen und  $f_2 \approx 13,0$  Hz für ungedämpfte Massen. Die Resonanzfrequenzen  $f_2$  der ungedämpften Massen der reduzierten Modelle (außer `5link_table_subst`) sind höher als beim Referenzmodell,  $f_{2red} = 14,0$  Hz. Sie sind dabei wie erwartet von der ausgewählten Reduktionstechnik unabhängig. Die Resonanzfrequenz  $f_1$  der gedämpften Massen bleibt unverändert.

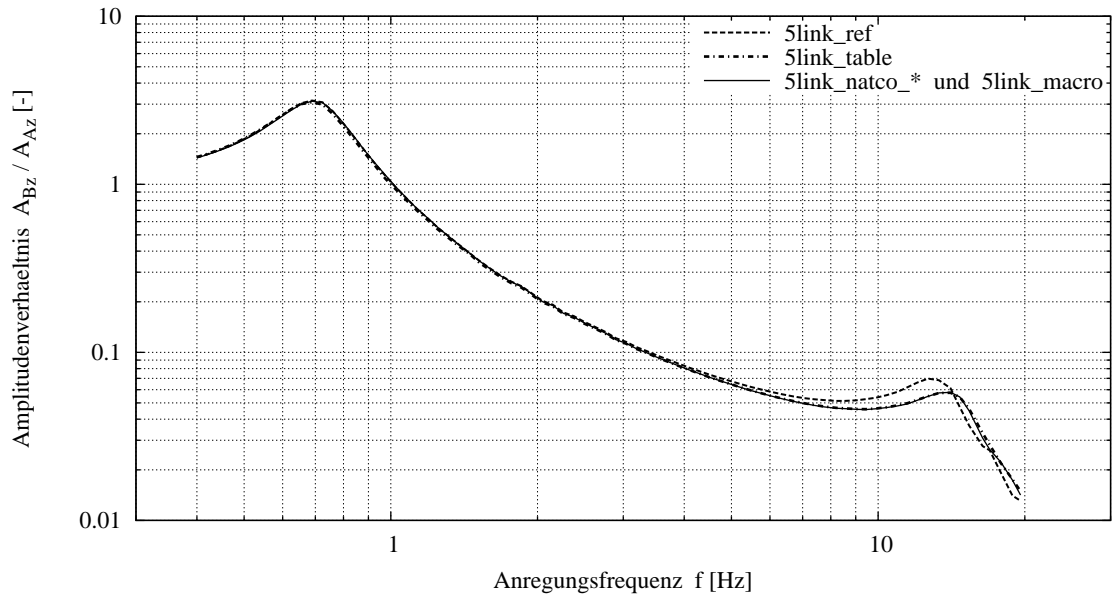


Abbildung 5.3: Erstes Simulationsszenario – Verhältnis der Amplitude  $A_{B_z}$  der ersten harmonischen Schwingung des Fahrzeugaufbaus zur Amplitude  $A_{A_z}$  der Vertikalerregung im Radaufstandspunkt (\* steht für `_iter`, `_iter_a`, `_proj` und `_baumgte`)

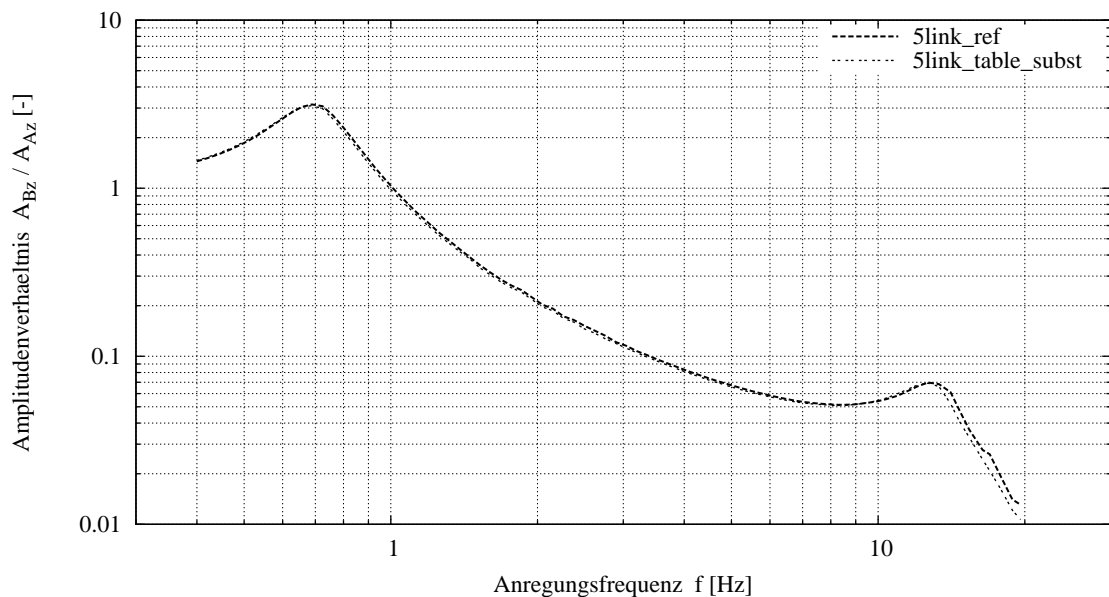


Abbildung 5.4: Erstes Simulationsszenario, Radaufhängungsmodell mit Ersatzmassen – Verhältnis der Amplitude  $A_{B_z}$  der ersten harmonischen Schwingung des Fahrzeugaufbaus zur Amplitude  $A_{A_z}$  der Vertikalerregung im Radaufstandspunkt

Die Amplituden aller reduzierten Modelle liegen innerhalb des durch die beiden Resonanzfrequenzen begrenzten Bereichs unter den Amplituden des Referenzmodells **5link\_ref**, wobei die Differenz mit steigender Frequenz zunimmt. Dieses Verhalten liegt in der Vernachlässigung der Massengrößen der Lenker, die auf niedrigere ungedämpfte Massen der reduzierten Modelle führt. Um diese Effekte möglichst zu minimieren, sind im Ersatzmodell **5link\_table\_subst** die Massen der Lenker dem Aufbau und dem Radträger zugeordnet worden. Die Ergebnisse in Abbildung 5.4 zeigen, dass dieses Ersatzmodell in guter Übereinstimmung mit dem Referenzmodell ist.

Für einen Vergleich der Rechenzeiten wird die Radaufhängung im zweiten Simulationsszenario mit einem periodischen Signal erregt. Die Zeitintegration erfolgt dabei für jede Modellvariante mit dem expliziten Euler-Verfahren mit der Schrittweite  $h = 1$  ms. Die Rechenzeiten  $T_{CPU}$  für die Simulationszeit von  $T_{sim} = 20$  s sind in Tabelle 5.2 angeführt. Der gesamte Rechenzeitvergleich wird auf ein und demselben PC durchgeführt, ausgestattet mit einem Intel Xeon (Pentium IV) Prozessor mit einer Taktfrequenz 3,2 GHz, einem Arbeitsspeicher von 4 GB RAM und einem Betriebssystem Microsoft Windows XP. Mit diesem Rechner liegen die Rechenzeiten aller reduzierten Modelle deutlich unter der Simulationszeit. Der Echtzeitfaktor  $k_{EZ} = T_{CPU}/T_{sim}$  liegt zwischen  $k_{EZ} = 0,42$  (Modellvariante **5link\_natco\_iter**) und  $k_{EZ} = 0,14$  (Modellvariante **5link\_table**), alle Modelle sind deshalb echtzeitfähig. Das Referenzmodell **5link\_ref** beinhaltet kinematisch geschlossene Schleifen und wird deshalb mit dem Integrationsverfahren SODASRT mit einer konstanten Schrittweite von  $h_{n,max} = 0,001$  s berechnet. Obwohl die gesamte Rechenzeit dieses Referenzmodells auch unter der Echtzeit liegt, muss es nicht in jedem einzelnen Integrationschritt gewährleistet werden. Die Echtzeitfähigkeit des Referenzmodells wird deshalb nicht garantiert.

Man beachte, dass die Rechenzeiten der Modellvarianten **5link\_table** und **5link\_macro** deutlich unter den Rechenzeiten der anderen Modelle liegen. Die Variante **5link\_natco\_iter** ist dagegen wegen der Iterativlösung der Lagebedingungen (4.36) die zeitaufwändigste. Wenn allerdings für die Iteration die analytische Jacobimatrix  $\Phi_{z_a}$  herangezogen wird (Modell **5link\_natco\_iter\_a**), sinkt die Rechenzeit um fast 25%. Dies ist aber nur bei dem Ansatz mit natürlichen Koordinaten der Fall, da dabei die Jacobimatrix dünn besetzt

Tabelle 5.2: Zweites Simulationsszenario – Rechenzeiten  $T_{CPU}$  der numerischen Integration mit dem expliziten Euler-Verfahren, die Simulationszeit beträgt  $T_{sim} = 20$  s

Modell	$T_{CPU}$ [s]	$k_{EZ}$ [-]
<b>5link_ref</b>	6,92*	0,34
<b>5link_natco_iter</b>	8,47	0,42
<b>5link_natco_iter_a</b>	6,41	0,32
<b>5link_natco_proj</b>	4,05	0,20
<b>5link_natco_baumgte</b>	4,22	0,21
<b>5link_macro</b>	3,23	0,16
<b>5link_table</b>	2,88	0,14

\* SODASRT,  $h_{n,max} = 0,001$ s



ist und ihre Vorgabe in analytischer Form gegenüber der numerischen Berechnung zu deutlichen Zeitvorteilen führt. Im Falle des Makrogelenks mit der Formulierung in Relativkoordinaten ist dagegen die Jacobimatrix von kleiner Dimension und voll besetzt, die Vorgabe der analytischen Jacobimatrix kann dann teilweise zu genaueren Ergebnissen beitragen, jedoch kaum zu kürzeren Rechenzeiten.

Noch kürzere Rechenzeiten sind auch dann zu erwarten, wenn man innerhalb des Makrogelenks die iterative Lösung der Koordinaten  $\mathbf{z}_a$  (Gleichung (4.39)) umgeht. Die numerische Integration der Geschwindigkeitsbedingungen (4.40) erweist sich als nützliche Vorgehensweise. Werden zusätzlich noch die Stabilisierungstechniken aus Abschnitt 4.5 angewendet, kann dann auch die Simulationsgenauigkeit in vorgegebenen Toleranzen gehalten werden. Eine Beurteilung der beiden hier verwendeten Stabilisierungstechniken bei der Formulierung in natürlichen Koordinaten erfolgt auf Grund des Residuums  $\phi_1$  der Lagebedingung (4.51), in der die konstante Länge des ersten Lenkers festgelegt ist, siehe Abbildung 5.5.

Für die Baumgarte-Stabilisierung, siehe Gleichung (4.41), angewandt in der Modellvariante `5link_natco_baumgte`, ist der Koeffizient  $\alpha_B$  maßgeblich. Beim betrachteten Beispiel ist die Baumgarte-Stabilisierung bis etwa  $\alpha_B = 2000$  stabil. Für Werte  $\alpha_B > 2000$  wird die numerische Integration jedoch instabil weswegen dieser Bereich auch nicht weiter betrachtet wird. Wie Abbildung 5.5 zeigt, nimmt das Residuum  $\phi_1$  im Bereich von  $1 \leq \alpha_B \leq 2000$  mit steigendem  $\alpha_B$  ab, in der Genauigkeit der Lösungen der Bewegungsgleichungen bleibt davon jedoch unbeeinflusst, siehe Abbildung C.2. Der Koeffizient  $\alpha_B >$  ist also für dieses Simulationsmodell im Bereich  $1 \leq \alpha_B \leq 2000$  zu wählen, die folgenden

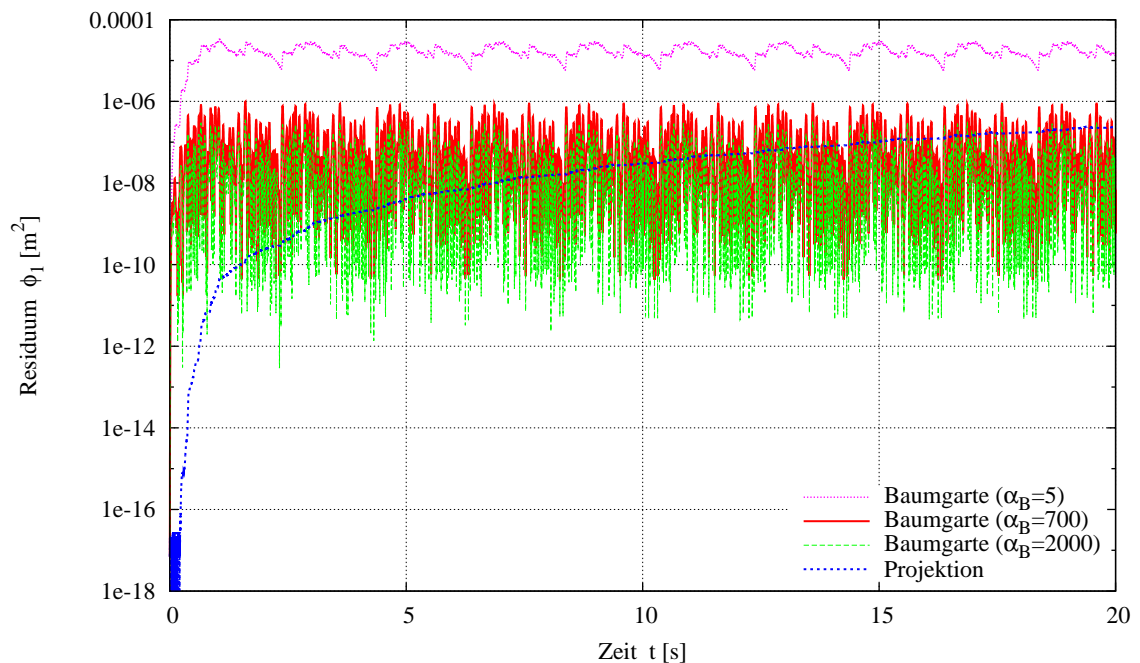


Abbildung 5.5: Zweites Simulationsszenario – Residuen bei der Auswertung der Lagebedingung (4.51) bei der Baumgarte-Stabilisierung (Modellvariante `5link_natco_baumgte`) und bei der Stabilisierung mittels Projektion (Modellvariante `5link_natco_proj`)

Berechnungen sind mit  $\alpha_B = 5$  durchgeführt.

Durch die Stabilisierung mittels Projektion im Modell `5link_natco_proj` kann das Residuum  $\phi_1$ , wie Abbildung 5.5 zeigt, im Vergleich zur Baumgarte-Stabilisierung erheblich reduziert werden; es ergibt sich in der Größenordnung  $O(\phi_1) = 10^{-10}$ , während bei der Baumgarte-Stabilisierung höchstens  $O(\phi_1) = 10^{-8}$  für  $\alpha_B = 2000$  erreicht wird. Im Allgemeinen nimmt mit steigenden Genauigkeitsanforderungen die Zahl der Projektionsschritte zu deren Erfüllungen zu, wodurch allerdings dann auch die erforderlichen Rechenzeiten ansteigen. Bei der Stabilisierung der Lagebedingungen des Makrogelenks `5link_natco_proj` erwiesen sich im Normalfall zwei Projektionsschritte bei moderaten Genauigkeitsanforderungen als ausreichend, wobei die erreichten Rechenzeiten mit denjenigen der Baumgarte-Stabilisierung vergleichbar sind, siehe Tabelle 5.2. Einer der Nachteile der Baumgarte-Stabilisierung ist, dass sie auf eine Störung mit Verzögerung reagiert (Abbildung 5.5), weswegen das Residuum nach Auftreten einer entsprechenden Anregung die Toleranzschranke sogar überschreiten kann. Bei der Projektionsmethode tritt dieses Phänomen zwar nicht auf, da jedoch das Residuum bei einer Anregung (ständig) ansteigt, kann auch hier bei längeren Simulationszeiten die Toleranzschranke überschritten werden, Abbildung 5.5; bei der Baumgarte-Stabilisierung spielt dagegen die Simulationszeit diesbezüglich keine Rolle, das Residuum konvergiert nach einer Anregung immer zu Null.

Bei den Makrogelenken, bei denen die durch Integration berechnete Lösung  $\mathbf{z}_a$  mit dem Baumgarte-Verfahren stabilisiert wird (Varianten `5link_macro` und `5link_natco_baumgte`), erwies sich die Formulierung in Relativkoordinaten (d. h. `5link_macro`) als schnellere Variante.

Zusammenfassend kann man sagen, dass beim Radaufhängungsmodell für die Echtzeitsimulation das Kennfeldgelenk (Modell `5link_table`) eine sehr effektive Methode zur Reduktion der Rechenzeit ist. Im Falle einer großen Modellvielfalt für unterschiedlichste Radaufhängungen ist dagegen das Makrogelenk mit Integration der Zwangsbedingung auf Geschwindigkeitsebene (Modellvarianten `5link_natco_proj`, `5link_natco_baumgte`) vorzuziehen. Der Grund dafür ist, dass das Kennfeldgelenk ein relativ aufwändiges, modellspezifisches Pre-Processing zum Aufbau der notwendigen Datentabellen erfordert. Das Makrogelenk mit iterativ gelösten Lagebedingungen (`5link_natco_iter`) weist keine Vorteile auf, da zum Einen die iterative Lösung sehr zeitaufwendig ist und zum Anderen die Genauigkeit der Lösung für einen Integrationsschritt bei Einhaltung vorgegebener Grenzen der zulässigen Rechenzeit nicht garantiert werden kann. Die Ungenauigkeiten des Modells, die wegen der Vernachlässigung der Massengrößen der Lenker auftreten, kann man sehr effektiv durch zusätzliche Ersatzmassen am Fahrzeugaufbau und hauptsächlich am Radträger eliminieren.

### 5.3 Beispiel Gesamtfahrzeug

Das Modell eines Personenkraftwagens (PKW-Modell) besteht aus den folgenden Baugruppen: Fahrzeugaufbau, vordere Einzelradaufhängungen, Lenkung und hintere Verbundlenkerachse (Abbildung 5.6). Die Parameter des Fahrzeugs sind im Anhang D angeführt.

In den Massengrößen der Aufbau sind zusätzlich zwei Insassen auf den vorderen Sitzen und Motor mit Getriebe berücksichtigt. Die zu vergleichenden Reduktionsmethoden

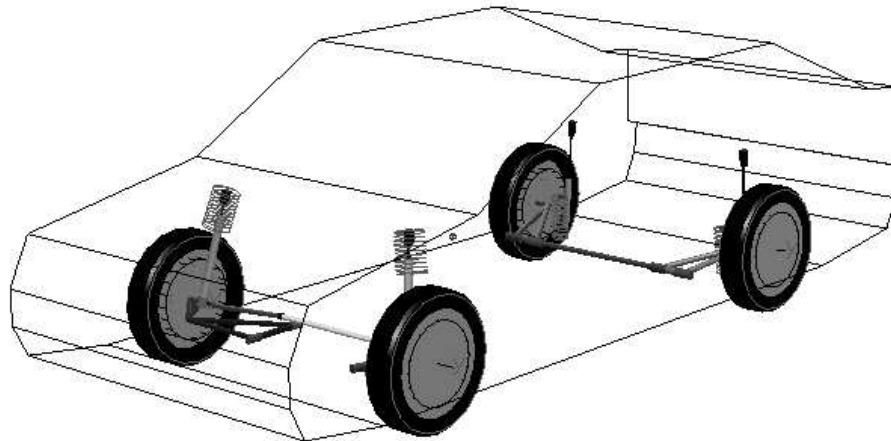


Abbildung 5.6: Fahrzeugmodell

inklusive Elastokinematikmodellierung werden auf die vorderen Federbein-Radaufhängungen angewendet und sind in Abschnitt 5.3.1 näher beschrieben. Die hintere Verbundlenkerachse wird generell vereinfacht ohne Lagerelastizitäten modelliert, um die Ergebnisse direkt und ohne Seiteneffekte den unterschiedlichen Vorderachsmodellierungen zuordnen zu können. Die Verbundlenkerachse wird nicht reduziert, da sie keine kinematischen Schleifen aufweist.

### 5.3.1 Vordere Radaufhängung und ihre Modellvarianten

Die Federbein-Radaufhängung (auch McPherson-Radaufhängung) nach Abbildung 5.7 ist aus folgenden Teilen aufgebaut: Radträger 3, unterer Dreiecksarm 2, Lenkstange 4 und Stoßdämpfer. Der Stoßdämpfer besteht aus der mit dem Radträger fest verbundenen Außenrohr 6 und einer beweglichen Kolbenstange mit Kolben 5. Die Feder 7 ist zwischen dem oberen Dreiecksarm 1 und dem Radträger 3 angebracht.

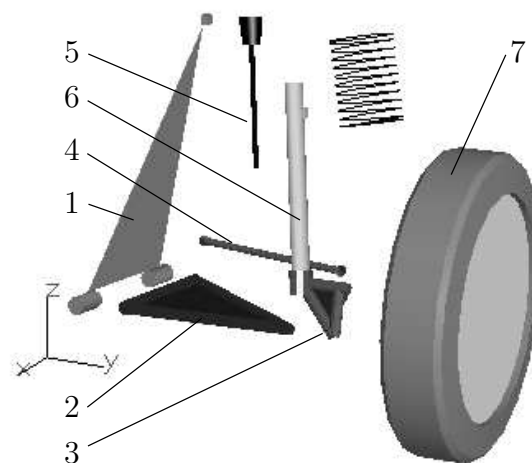


Abbildung 5.7: Struktur der Federbein-Radaufhängung

Aus dem vollmodellierten Fahrzeug werden reduzierte Modelle abgeleitet, indem man die vordere Federbein-Radaufhängung mit ausgewählten Reduktionsmethoden vereinfacht. Im Referenzmodell, bezeichnet als **pkw\_ref** in Tabelle 5.3, werden die Gelenke der Radaufhängung als ideal betrachtet, d. h. Lagerelastizitäten treten nicht auf. Im Modell **pkw\_natco** wird die Radaufhängungskinematik vereinfacht nachgebildet, wobei die Reduktionsmethode auf der Formulierung in unabhängigen Koordinaten basiert, siehe Abschnitt 4.6. Vernachlässigt werden die Körper Dreiecksarm 2, Lenkstange 4 und Kolbenstange 5. Deren Massengrößen werden dem Fahrzeugaufbau zugeschlagen.

Das Modell **pkw\_el\_ref** berücksichtigt zusätzlich die Elastokinematik der beiden Lager des unteren Dreiecksarms und des Federbeinlagers. Dabei werden sowohl axiale als auch radiale Steifigkeiten und Dämpfungen der Lager betrachtet. Das reduzierte Modell **pkw\_el\_natco** erweitert das Modell **pkw\_natco**, in dem zusätzlich die Elastokinematik vereinfacht nach Abschnitt 4.8 nachgebildet wird. Dabei wird nur die Lenkwinkelverformung  $\gamma_{M_k M_e}$  als lineare Funktion von der Längskraft  $f_{Mx}$ , der Querkraft  $f_{My}$  und vom vertikalen Moment  $l_{Mz}$  betrachtet:

$$\gamma_{M_k M_e} = c_{\gamma_M, f_{Mx}} f_{Mx} + c_{\gamma_M, f_{My}} f_{My} + c_{\gamma_M, l_{Mz}} l_{Mz}. \quad (5.2)$$

Die Koeffizienten  $c_{\gamma_M, f_{Mx}}$ ,  $c_{\gamma_M, f_{My}}$  und  $c_{\gamma_M, l_{Mz}}$  sind dabei die entsprechenden linearen Steifigkeiten.

Tabelle 5.3: Übersicht der Varianten von Fahrzeugmodell, bezogen auf unterschiedliche Reduktionsmethoden zur Nachbildung der vorderen Federbein-Radaufhängung

Modell	Nachbildung der	
	Kinematik	Elastokinematik
<b>pkw_ref</b>	ideale Gelenke	—
<b>pkw_el_ref</b>	—	elastische Gummilager
<b>pkw_natco</b>	Makrogelenk (natürliche Koordinaten, Abschnitt 4.6)	—
<b>pkw_el_natco</b>	Makrogelenk (natürliche Koordinaten, Abschnitt 4.6)	zentralisierte Elastizität (Abschnitt 4.8)

### 5.3.2 Simulationsszenarien

Es werden zwei Fahrmanöver zum Vergleich der Reduktionsansätze hinsichtlich Kinematik und Elastokinematik durchgeführt. Als erster Fahrmanöver wird die „Einfahrt in den Kreis“ gewählt, Abbildung 5.8. Der Lenkvorgang wird bei diesem Fahrmanöver durch die Zahnstangenauslenkung in Querrichtung um  $y_{ZS} = 0,0032$  m bestimmt. Die Anfangsgeschwindigkeit des Fahrzeugs ist  $v_0 = 80$  km/h. Die Simulationszeit ist  $T_{sim} = 50$  s.

Das zweite Fahrmanöver ist das „kontinuierliche Sinuslenken“ nach ISO-Norm [70]. Das Fahrzeug fährt mit einer Testgeschwindigkeit von  $v_0 = 100$  km/h auf gerader Strecke. Auf den Lenkrad wird ein sinusförmiges Signal mit gegebener konstanter Amplitude angebracht. Die Anregungsfrequenz wird stufenweise von  $f = 0,2$  Hz bis  $f = 2$  Hz mit

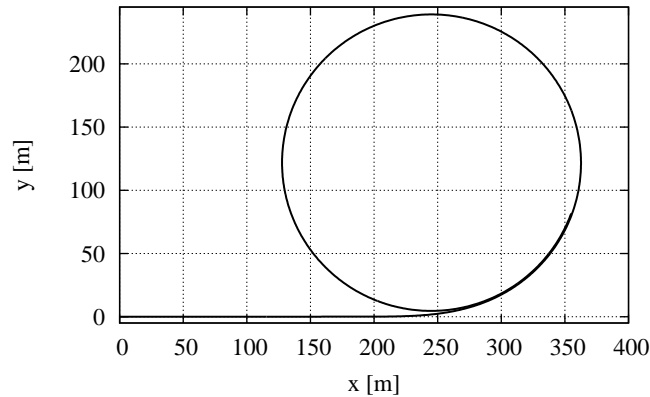


Abbildung 5.8: Erstes Simulationsszenario – Lage des Fahrzeugs (Modell `pkw_ref`)

der Schrittweite  $\Delta f = 0,1$  Hz geändert. Um die Amplitude zu bestimmen, wird nach [70] ein anderes Manöver durchgeführt, in dem das Fahrzeug mit der Testgeschwindigkeit in eine Kurve einfährt. Der Radius der Kurve nimmt langsam und kontinuierlich ab. Die Amplitude fürs Sinuslenken ergibt sich demzufolge, wenn die Querb beschleunigung des Fahrzeugs  $a_{By} = 4 \text{ m/s}^2$  erreicht. Nach [70] darf die Fahrzeuggeschwindigkeit während des kontinuierlichen Sinuslenkens absinken. Da jedoch der ganze Frequenzbereich während eines einzigen Simulationslaufes abgedeckt wird, würde die Geschwindigkeit am Ende der Simulation unangemessen niedrig. Deswegen wirkt an den vorderen Rädern ein konstanter Antriebsmoment, so dass es zu keinem großen Geschwindigkeitsabfall während des Fahrmanövers kommt. In Abbildungen D.1 und D.3 (Anhang D) sind die Zeitverläufe der Fahrzeuggeschwindigkeiten dargestellt, wobei auch im ersten Simulationsszenario ein konstanter Antriebsmoment an die vorderen Räder angebracht wird.

### 5.3.3 Bewertung der Simulation

Das Beurteilungskriterium der Fahrzeugmodelle bei der Einfahrt in den Kreis ist die Abweichung der Fahrzeuglage von der Lage des Referenzmodells `pkw_ref`, Abbildung 5.9. Zur Bewertung des ISO-Fahrmanövers „kontinuierliches Sinuslenken“ wird die Frequenzantwort (engl.: frequency response function - FRF) der Querb beschleunigung und der Giergeschwindigkeit des Fahrzeugs auf Lenkradwinkel definiert [70]. Der Lenkradwinkel wird hierbei also im regelungstechnischen Sinne als Eingangsgröße, die Querb beschleunigung bzw. die Giergeschwindigkeit als Ausgangsgröße betrachtet. Die Ergebnisse der Simulation im Zeitbereich (Abbildung D.2 auf Seite 102) werden in den Frequenzbereich transformiert und als Verstärkung und Phasenwinkel angegeben, siehe Abbildungen 5.10 und 5.11.

Das reduzierte Fahrzeugmodell `pkw_natco` weist bei beiden Fahrmanövern sehr gute Übereinstimmung mit dem Referenzmodell `pkw_ref` auf. Die Berücksichtigung der Elastokinematik (Modelle `pkw_el_ref` und `pkw_el_natco`) ist insbesondere bei der Einfahrt in den Kreis bedeutsam, da die Abweichung der Fahrzeuglage vom Referenzmodell `pkw_ref` am Ende dieses Manövers (Gesamtstrecke über 1000 m)  $\Delta r_B = 10,5 \text{ m}$  beim Modell `pkw_el_ref` bzw.  $\Delta r_B = 12,7 \text{ m}$  beim Modell `pkw_el_natco` ist (Abbildung 5.9). Beim kontinuierlichen Sinuslenken ist der Einfluss der Elastokinematik kleiner, da die Abweichungen wegen

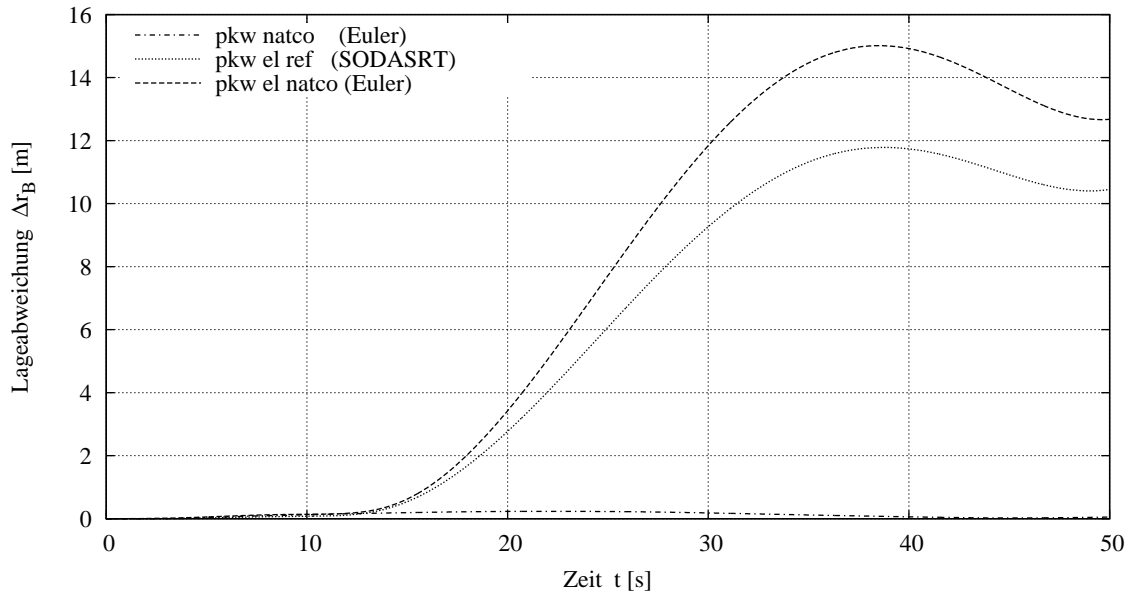


Abbildung 5.9: Erstes Simulationsszenario – Abweichung der Lage des Fahrzeugs vom Referenzmodell `pkw_ref`

der Periodizität der Anregung offenbar weniger zur Geltung kommen (Abbildung 5.10). Das reduzierte Modell `pkw_el_natco` mit der vereinfachten Elastokinematik (siehe Gleichung (5.2)) zeigt nur relativ kleine Abweichungen vom Modell `pkw_el_ref` mit der aufwendig modellierten Elastokinematik, was die Verwendbarkeit des Ansatzes der zentralisierten Elastizität nachweist.

In Tabelle 5.4 werden die Rechenzeiten aller Fahrzeugmodelle bei der Einfahrt in den Kreis verglichen. Beide reduzierten Modelle `pkw_natco` und `pkw_el_natco` werden mit dem expliziten Euler-Verfahren mit der Schrittweite  $h = 1$  ms berechnet. Der Echtzeitfaktor ist  $k_{EZ} = 0,47$  beim Modell `pkw_natco` bzw.  $k_{EZ} = 0,49$  beim Modell `pkw_el_natco`. Die Betrachtung der Elastokinematik mittels der zentralisierten Elastizität ist also hinsichtlich der Rechenzeit unerheblich. Die Bewegungsgleichungen der Referenzmodelle `pkw_ref` und `pkw_el_ref` stellen ein differentiell-algebraisches Gleichungssystem dar und werden mit dem Integrationsverfahren SODASRT berechnet. Die Echtzeitfähigkeit der Referenzmodelle kann deshalb nicht garantiert werden.

Tabelle 5.4: Erstes Simulationsszenario – Berechnungszeiten der numerischen Integration mit explizitem Euler-Verfahren, die Simulationszeit beträgt  $T_{sim} = 50$  s

Modell	$T_{CPU}$ [s]	$k_{EZ}$ [-]
<code>pkw_ref</code>	23,91*	0,48
<code>pkw_natco</code>	23,52	0,47
<code>pkw_el_ref</code>	26,63*	0,53
<code>pkw_el_natco</code>	24,61	0,49

\* SODASRT,  $h_{n,max} = 0,001$ s

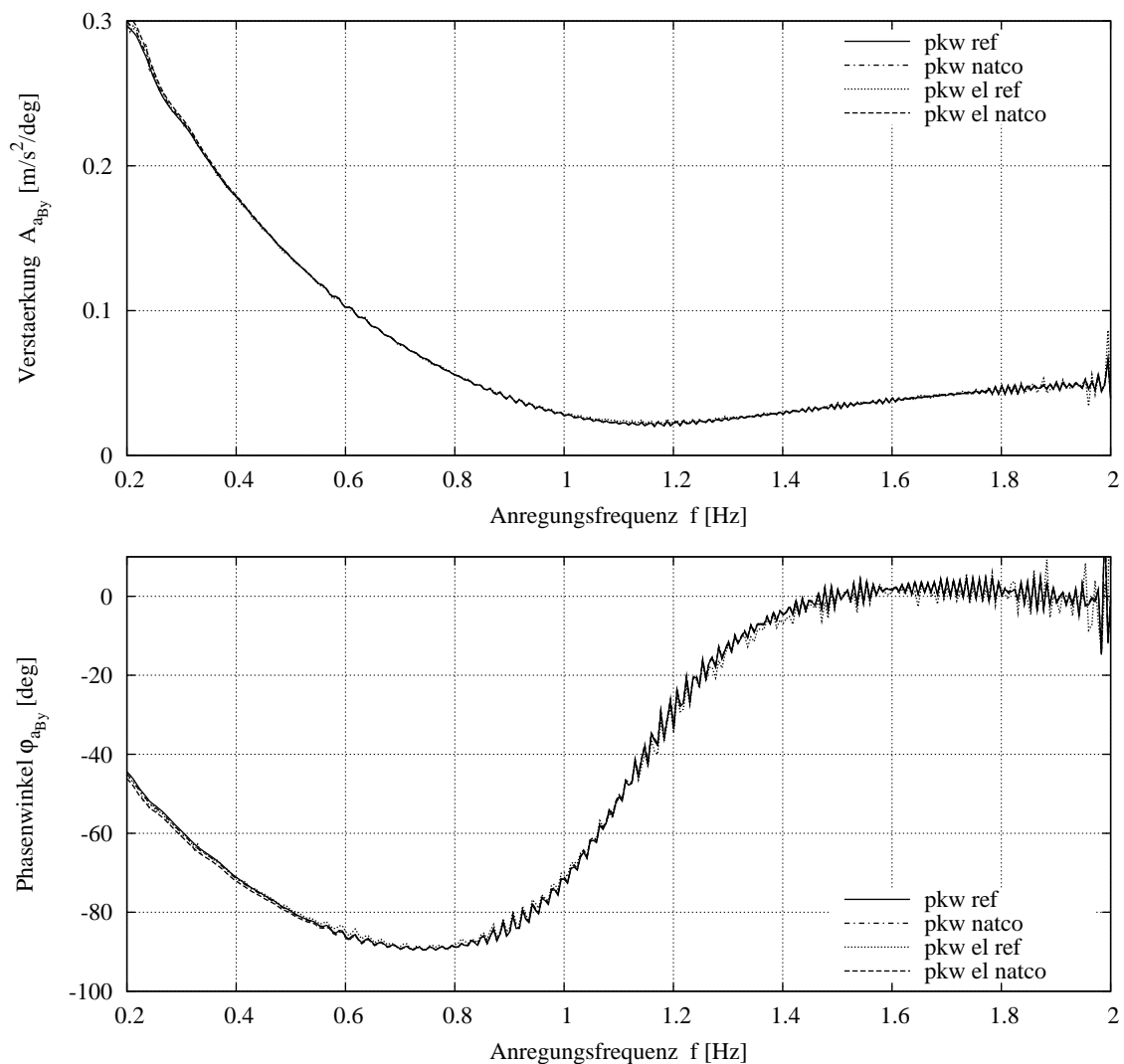


Abbildung 5.10: Zweites Simulationsszenario – FRF von Querschleunigung  $a_{By}$  des Fahrzeugs

#### 5.3.4 Zusammenfassung der Simulation

Die reduzierten Radaufhängungsmodelle weisen insgesamt sehr gute Übereinstimmungen mit den Referenzmodellen auf. Die Reduktionstechniken zur Nachbildung der Radaufhängungs kinematik sind also anwendbar. Eine Umrechnung der Massengrößen der vernachlässigten Körper auf den Fahrzeugaufbau und den Radträger steigert die Genauigkeit der Ergebnisse wesentlich und ist deshalb in jedem Fall zu empfehlen. Die Verwendbarkeit des Ansatzes der zentralisierten Elastizität wurde ebenfalls nachgewiesen. Der Prozess zur Bestimmung der Abhängigkeit der Lageverformung des Radträgers von den wirkenden Kräften ist jedoch weiter zu automatisieren, um die Reduktion eines detaillierten zu einem echtzeitfähigen Modell als voll rechnerunterstütztes Prozess im Sinne des CAE zur Verfügung stellen zu können.

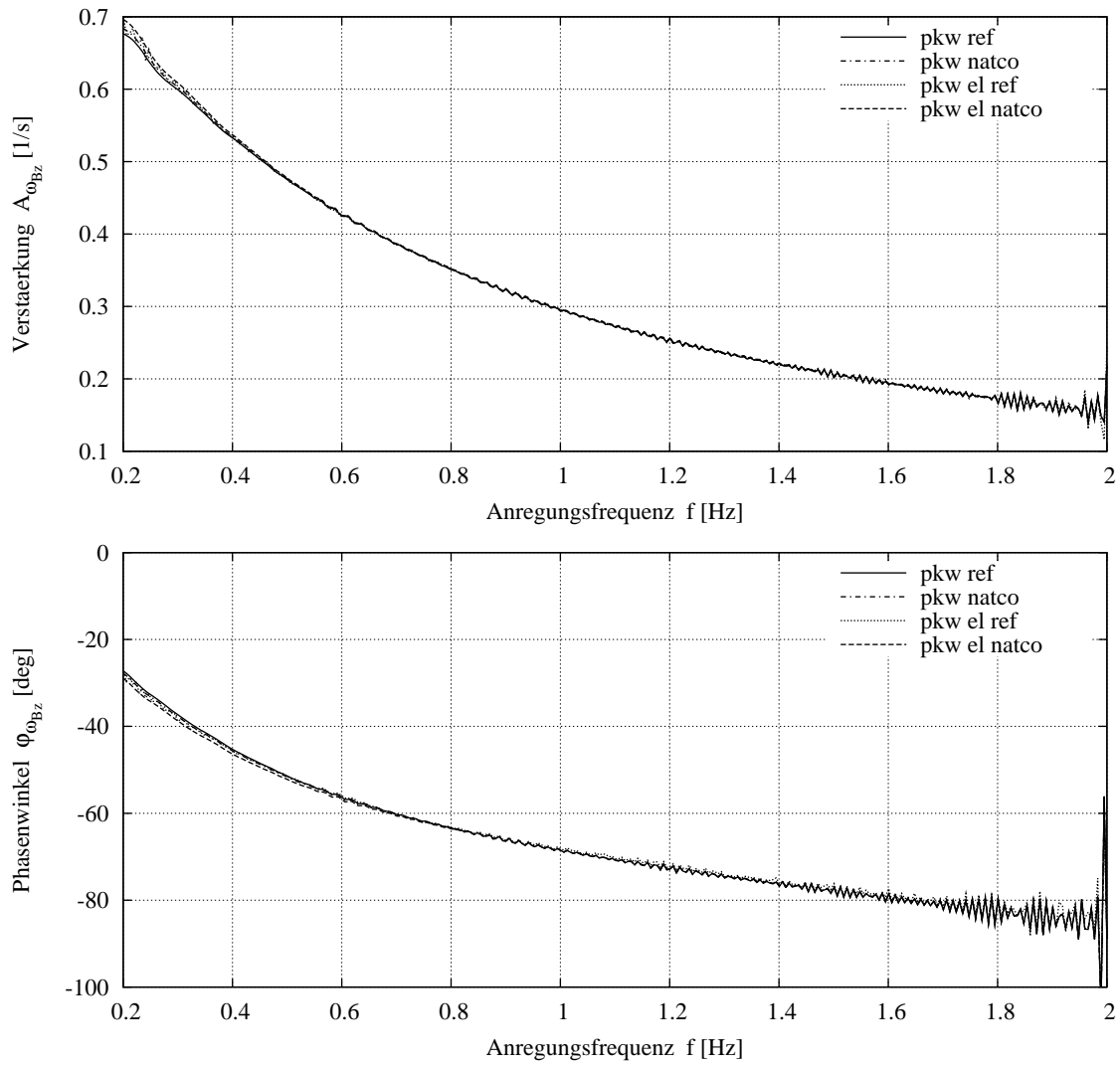


Abbildung 5.11: Zweites Simulationsszenario – FRF von Giergeschwindigkeit  $\omega_{Bz}$  des Fahrzeugs



# Kapitel 6

## Zusammenfassung und Ausblick

In der vorliegenden Arbeit wurden Ansätze zusammengefasst, weiterentwickelt und implementiert, die zur Modellreduktion mechanischer Systeme mit kinematisch geschlossenen Schleifen angewendet werden können. Im Vordergrund steht dabei eine einheitliche Betrachtungsweise dieser Ansätze sowie deren intensive vergleichende Analyse im Hinblick auf die Echtzeitsimulation. Die Simulationsmodelle basieren auf der Theorie der Mehrkörpersysteme, wobei die geschlossenen Schleifen durch algebraische Zwangsbedingungen in den resultierenden Bewegungsgleichungen berücksichtigt werden. Untersucht wurden nun Methoden der Modellreduktion, die auf der Eliminierung dieser Zwangsbedingungen aus den Bewegungsgleichungen aufbauen. Die Anwendung konzentriert sich ausschließlich auf Radaufhängungen von Kraftfahrzeugen.

Die Auswahl der Reduktionsmethoden erfolgt mit besonderer Betonung darauf, dass bei deren Implementierung der grundlegende Mehrkörperformalismus möglichst nicht modifiziert werden muss. Dadurch wird zwar die Anzahl der sinnvoll anwendbaren Reduktionstechniken beschränkt, die Wartbarkeit der Implementierungen wird dafür aber unter praktischen Gesichtspunkten erheblich einfacher. Die Implementierung der Methoden in einem multidisziplinären Simulationsprogramm hat den weiteren Vorteil, dass man das umfassende Gesamtfahrzeugmodell (inklusive z. B. mechanische und hydraulische Systeme, Regelung usw.) modular aus unterschiedlichen Subsystemen generieren kann, die jeweils mit dem am besten geeigneten CAE-Werkzeug modelliert sind. Dadurch wird insbesondere ein virtueller Produktentstehungsprozess für ein Fahrzeug unterstützt. Auch lassen sich realitätsnahe Fahrzeugmodelle erzeugen, wie sie z. B. für Fahrsimulatoren erforderlich sind.

Im Rahmen dieser Arbeit wurden die Reduktionstechniken auf die Teilmodelle der Radaufhängungskinematik und -elastokinematik angewendet. Zur Modellreduktion wurden hierbei zunächst in jedem betroffenen Subsystem die Körper mit verhältnismäßig kleinen Massengrößen (z. B. die Lenker der Radaufhängung) vernachlässigt. Die kinematische Übertragungsfunktion des Subsystems wurde dann entweder durch eine Polynominterpolation ermittelt oder aber, wie im Falle des Makrogelenks, durch eine subsystem-interne Lösung der algebraischen Schleifenschlussbedingungen bereitgestellt. Dabei erfolgt beim Makrogelenk die Aufstellung der Schleifenschlussbedingungen wahlweise mit relativen oder mit natürlichen Koordinaten. Ein wesentlicher Beitrag dieser Arbeit liegt in der Anwendung eben dieser natürlichen Koordinaten. Die interne Lösung der algebraischen Zwangsbedingungen wurde entweder mit Baumgarte- oder mit Projektionstechniken sta-

bilisiert, wobei letztere bei den im Rahmen dieser Arbeit verwendeten Reduktionstechniken erstmals angewendet wurde. Die abschließend vorgestellten Simulationen zeigen, dass man mit diesen Reduktionstechniken eine sehr gute Übereinstimmung mit den Ergebnissen aus den unreduzierten, originalen Simulationsmodellen erreichen kann. Die Umrechnung der Massengrößen der vernachlässigten Lenker auf den Fahrzeugaufbau bzw. auf den Radträger ist jedoch insbesondere beim Gesamtfahrzeugmodell angeraten.

Die Elastokinematik der Radaufhängung wurde als so genannte zentralisierte Elastizität nachvollzogen. Dieser Ansatz berücksichtigt die zusätzliche Änderung der Radstellung unter Einwirkung der entsprechenden Kräfte. Die Ergebnisse der Simulationen bestätigen ebenfalls, dass diese Methode geeignet und sinnvoll anwendbar ist, wobei aber die Abstimmung der Elastizitätsparameter einen entscheidenden Einfluss auf die Simulationsgüte besitzt.

Die in dieser Arbeit verwendete einheitliche Betrachtung der Reduktionsmethoden auf theoretischer Ebene vereinfacht deren Verständnis und unterstützt dadurch gleichzeitig deren künftige Weiterentwicklung. Eine umfassende Verifizierung aller implementierten Methoden für unterschiedliche Radaufhängungsmodelle und unterschiedliche Simulationsszenarien ist ebenfalls ein wichtiger Bestandteil der vorliegenden Arbeit. Durch die einheitliche Implementierung der Reduktionstechniken in SIMPACK wird die Basis für deren praktischen Einsatz geschaffen. Ein bedeutender Teil dieser Arbeit – das Kennfeldgelenk – steht bereits unter dem Namen „Virtual Suspension“ als ein Standardelement in der SIMPACK-Bibliothek für den Anwender bereit (siehe [71]).

Die in Kapitel 3 aufgelisteten Ziele der vorliegenden Arbeit wurden mit den oben erwähnten Ansätzen erreicht. Durch eine Zusammenfassung der Theorie der für ein multidisziplinäres Mehrkörperprogramm einsetzbaren Reduktionstechniken zur Abbildung der Kinematik und Elastokinematik der Radaufhängungen wurden die Ziele 1 und 3 erfüllt. Mit dem Ansatz natürlicher Koordinaten und geeigneter Stabilisierungstechniken wurde die Weiterentwicklung des Makrogelenks realisiert (Ziel 2). Zur Erfüllung des dritten Zielles hat ebenfalls eine weitgehende Anwendung der zentralisierten Elastizität beigetragen. Durch die Implementierung aller untersuchten Reduktionsmethoden in dem multidisziplinären Simulationsprogramm SIMPACK wurde das Ziel 4 erreicht. Dem fünften Ziel der möglichst umfassenden Verifizierung der Reduktionsmethoden wurde ebenfalls Rechnung getragen. Hierzu werden insgesamt acht Modellvarianten der Raumenker-Radaufhängung und vier Modellvarianten des Gesamtfahrzeugs in je zwei Simulationsszenarien untersucht.

Die umfangreichen Simulationen bestätigten, dass in Bezug auf ausreichend genaue Ergebnisse eine vollständig modellierte Radaufhängung durch eine reduzierte Modellierung ersetzt werden kann. Die vorgestellten Reduktionsansätze sind also prinzipiell durchaus auch im Hinblick auf eine Echtzeitsimulation als geeignet zu bewerten. Dabei wurde die gesteigerte Effizienz der Simulation einerseits durch den reduzierten Rechenaufwand, d. h. die Bewegungsgleichungen der Lenker werden nicht erstellt, und andererseits durch die Transformation der Bewegungsgleichungen auf die numerisch wesentlich einfacher lösbare Form gewöhnlicher Differentialgleichungen erreicht. Die reduzierten Simulationsmodelle wurden mit dem expliziten Euler-Verfahren in Echtzeit berechnet.

Durch eine Parametrisierung der Radaufhängungsmodelle wurde die Erzeugung des reduzierten Fahrzeugmodells aus einem detaillierten Modell erheblich erleichtert. Bis jetzt ist jedoch die Erstellung echtzeitfähiger Fahrzeugmodelle immer noch mit viel Handarbeit sowie mit fortgeschrittenem Expertenwissen verbunden. Eine weitere Automati-

sierung der beschriebenen Reduktionsprozesse ist also vor allem im Hinblick auf deren vereinfachte und effiziente Anwendbarkeit notwendig. Damit könnte dann nämlich auch die Modellreduktion auf andere Subsysteme, z. B. auf Lenksysteme oder gesamte Vorderachse, unkompliziert angewendet werden. Verbunden damit wäre dann natürlich eine weitere, erhebliche Steigerung der rechnerischen Effizienz.



# Anhang A

## Relativkinematik

Es werden vier orthogonale Koordinatensysteme 0, 1, 2 und 3 im Raum definiert, die nach der gegebenen Reihenfolge verkettet sind, d. h. die Relativkinematik 01, 12 und 23 ist zu beschreiben. Die Größen der Relativkinematik werden jeweils im Ausgangssystem angeführt, d. h. 01 im Koordinatensystem 0, 12 im Koordinatensystem 1, usw. Gesucht werden die kinematischen Größen 03, die im Koordinatensystem 0.

Für die hier abgeleiteten Gleichungen wird die folgende Überlegung von Bedeutung: Die im Koordinatensystem  $i$  angegebene und berechnete Ableitung  ${}^i\dot{\mathbf{b}}$  eines beliebigen Vektors  $\mathbf{b}$  wird nach der Regel

$$\begin{aligned} {}^i\dot{\mathbf{b}} &= \frac{d}{dt} {}^i\mathbf{b} = \frac{d}{dt} (\mathbf{A}_{ij} {}^j\mathbf{b}) = \frac{d}{dt} \mathbf{A}_{ij} {}^j\mathbf{b} + \mathbf{A}_{ij} \frac{d}{dt} {}^j\mathbf{b} = \dot{\mathbf{A}}_{ij} {}^j\mathbf{b} + \mathbf{A}_{ij} {}^j\dot{\mathbf{b}} = \\ &= \underbrace{\dot{\mathbf{A}}_{ij} \mathbf{A}_{ij}^T}_{\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ij}} \mathbf{A}_{ij} {}^j\mathbf{b} + \mathbf{A}_{ij} {}^j\dot{\mathbf{b}} = \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ij} {}^i\mathbf{b} + {}^i({}^j\dot{\mathbf{b}}) = \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ij} {}^i\mathbf{b} + {}^i\dot{\mathbf{b}}, \end{aligned}$$

definiert, wobei der Vektor  $\mathbf{b}$  ursprünglich im Koordinatensystem  $j$  gegeben ist, das sich relativ zum Koordinatensystem  $i$  mit der Relativdrehgeschwindigkeit  $\boldsymbol{\omega}_{ij}$  dreht.

Man führt zuerst die Bewegung 02 des Koordinatensystems 2 ein, das sich relativ zum 1 bewegt, also

$$\overline{02} = \overline{01} + \overline{12}.$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{02} &= \mathbf{A}_{01} \mathbf{A}_{12}, \\ \boldsymbol{\omega}_{02} &= \boldsymbol{\omega}_{01} + \boldsymbol{\omega}_{12}, \\ \dot{\boldsymbol{\omega}}_{02} &= \dot{\boldsymbol{\omega}}_{01} + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{01} \boldsymbol{\omega}_{12} + \dot{\boldsymbol{\omega}}_{12}, \\ \mathbf{r}_{02} &= \mathbf{r}_{01} + \mathbf{r}_{12}, \\ \dot{\mathbf{r}}_{02} &= \dot{\mathbf{r}}_{01} + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{01} \mathbf{r}_{12} + \dot{\mathbf{r}}_{12}, \\ \ddot{\mathbf{r}}_{02} &= \ddot{\mathbf{r}}_{01} + \dot{\tilde{\boldsymbol{\omega}}}_{01} \mathbf{r}_{12} + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{01} \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{01} \mathbf{r}_{12} + 2\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{01} \dot{\mathbf{r}}_{12} + \ddot{\mathbf{r}}_{12}. \end{aligned} \tag{A.1}$$

Die Geschwindigkeit  $\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{01} \mathbf{r}_{12}$  ergibt sich aus der relativen räumlichen Drehbewegung des Koordinatensystems 1, die Beschleunigungen  $\dot{\tilde{\boldsymbol{\omega}}}_{01} \mathbf{r}_{12}$  und  $\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{01} \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{01} \mathbf{r}_{12}$  sind jeweils der Tangential- und der Normalanteil der Beschleunigung dieser räumlichen Drehbewegung und  $2\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{01} \dot{\mathbf{r}}_{12}$  ist die Coriolisbeschleunigung.

Die Bewegung des Koordinatensystems 3, das sich relativ zu 2 bewegt, ergibt sich nach der Regel:

$$\overline{03} = \overline{02} + \overline{23} = \overline{01} + \overline{12} + \overline{23}.$$

Die entsprechenden Gleichungen sind:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{03} &= \mathbf{A}_{02}\mathbf{A}_{23}, \\ \boldsymbol{\omega}_{03} &= \boldsymbol{\omega}_{02} + \boldsymbol{\omega}_{23}, \\ \dot{\boldsymbol{\omega}}_{03} &= \dot{\boldsymbol{\omega}}_{02} + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{02}\boldsymbol{\omega}_{23} + \dot{\boldsymbol{\omega}}_{23}, \\ \mathbf{r}_{03} &= \mathbf{r}_{02} + \mathbf{r}_{23}, \\ \dot{\mathbf{r}}_{03} &= \dot{\mathbf{r}}_{02} + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{02}\mathbf{r}_{23} + \dot{\mathbf{r}}_{23}, \\ \ddot{\mathbf{r}}_{03} &= \ddot{\mathbf{r}}_{02} + \dot{\tilde{\boldsymbol{\omega}}}_{02}\mathbf{r}_{23} + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{02}\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{02}\mathbf{r}_{23} + 2\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{02}\dot{\mathbf{r}}_{23} + \ddot{\mathbf{r}}_{23}. \end{aligned} \tag{A.2}$$

Wenn man nun die Gleichungen (A.1) in (A.2) einsetzt, ergibt sich die Bewegung des kinematisch verketteten Koordinatensystems 3:

$$\mathbf{A}_{03} = \mathbf{A}_{01}\mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{23}, \tag{A.3a}$$

$$\boldsymbol{\omega}_{03} = \boldsymbol{\omega}_{01} + \boldsymbol{\omega}_{12} + \boldsymbol{\omega}_{23}, \tag{A.3b}$$

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_{03} = \dot{\boldsymbol{\omega}}_{01} + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{01}\boldsymbol{\omega}_{12} + \dot{\boldsymbol{\omega}}_{12} + (\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{01} + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{12})\boldsymbol{\omega}_{23} + \dot{\boldsymbol{\omega}}_{23}, \tag{A.3c}$$

$$\mathbf{r}_{03} = \mathbf{r}_{01} + \mathbf{r}_{12} + \mathbf{r}_{23}, \tag{A.3d}$$

$$\dot{\mathbf{r}}_{03} = \dot{\mathbf{r}}_{01} + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{01}\mathbf{r}_{12} + \dot{\mathbf{r}}_{12} + (\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{01} + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{12})\mathbf{r}_{23} + \dot{\mathbf{r}}_{23}, \tag{A.3e}$$

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{r}}_{03} &= \ddot{\mathbf{r}}_{01} + \dot{\tilde{\boldsymbol{\omega}}}_{01}\mathbf{r}_{12} + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{01}(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{01}\mathbf{r}_{12}) + 2\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{01}\dot{\mathbf{r}}_{12} + \ddot{\mathbf{r}}_{12} + \dot{\tilde{\boldsymbol{\omega}}}_{01}\mathbf{r}_{23} + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{01}(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{02}\mathbf{r}_{23} + \dot{\mathbf{r}}_{23}) + \\ &\quad + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{01}(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{12}\mathbf{r}_{23}) + [\dot{\tilde{\boldsymbol{\omega}}}_{12}\mathbf{r}_{23} + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{12}(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{12}\mathbf{r}_{23} + \dot{\mathbf{r}}_{23})] + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{02}\dot{\mathbf{r}}_{23} + \ddot{\mathbf{r}}_{23} = \\ &= \ddot{\mathbf{r}}_{01} + \dot{\tilde{\boldsymbol{\omega}}}_{01}(\mathbf{r}_{12} + \mathbf{r}_{23}) + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{01}[\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{01}(\mathbf{r}_{12} + \mathbf{r}_{23})] + \ddot{\mathbf{r}}_{12} + \dot{\tilde{\boldsymbol{\omega}}}_{12}\mathbf{r}_{23} + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{12}(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{12}\mathbf{r}_{23}) + \\ &\quad + \ddot{\mathbf{r}}_{23} + 2\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{01}(\dot{\mathbf{r}}_{12} + \dot{\mathbf{r}}_{23}) + 2\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{12}\dot{\mathbf{r}}_{23} + 2\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{01}(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{12}\mathbf{r}_{23}). \end{aligned} \tag{A.3f}$$

Die Gleichungen (A.3) ergeben sich entsprechend auch bei gleichzeitiger Bewegung dreier Körper nach [63].

# Anhang B

## Drehbewegung mittels dreier Punkte

Es seien drei Punkte  $P$ ,  $Q$  und  $R$  auf einem festen Körper gegeben. Die Lage, Geschwindigkeit und Beschleunigung der Punkte sind bekannt. Gesucht wird der Ansatz zur Berechnung der Drehbewegung des Körpers. Dafür wird ein körperfestes System des Körpers definiert, das über drei orthogonale Vektoren  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  und  $\mathbf{k}$  aufgespannt wird. Die erste und zweite zeitliche Ableitung dieser Einheitsvektoren wird ebenfalls von Interesse, um die Drehgeschwindigkeit und -beschleunigung des Körpers bestimmen zu können.

### Einheitsvektoren

Das System sei so orientiert, dass  $\mathbf{k}$  in Richtung  $\vec{PQ}$  zeigt,  $\mathbf{i}$  liegt in der durch die  $P$ – $Q$ – $R$  Punkte aufgespannte Ebene und ist so orientiert, dass der Punkt  $Q$  in die positive Richtung zeigt. Die Richtung von  $\mathbf{j}$  folgt aus der Bedingung des rechtshändigen Systems.

Der Vektor  $\mathbf{k}$  ist ein Einheitsvektor, daher gilt

$$\mathbf{k} = \frac{\mathbf{r}_{PQ}}{|\mathbf{r}_{PQ}|}. \quad (\text{B.1})$$

Der nicht normierte Vektor  $\vec{\mathbf{j}}$  liegt senkrecht zu Vektoren  $\mathbf{k}$  und  $\mathbf{r}_{PR}$ ,

$$\vec{\mathbf{j}} = \tilde{\mathbf{k}}\mathbf{r}_{PR} \quad \text{oder} \quad \vec{\mathbf{j}} = \vec{\mathbf{k}} \times \vec{\mathbf{r}}_{PR}$$

und wird normiert zum Vektor  $\mathbf{j}$ ,

$$\mathbf{j} = \frac{\vec{\mathbf{j}}}{|\vec{\mathbf{j}}|}. \quad (\text{B.2})$$

Der letzte Vektor muss der Bedingung der Orthogonalität unterliegen,

$$\mathbf{i} = \tilde{\mathbf{j}}\mathbf{k} \quad \text{oder} \quad \vec{\mathbf{i}} = \vec{\mathbf{j}} \times \vec{\mathbf{k}}. \quad (\text{B.3})$$

Aus den drei Einheitsvektoren wird die Drehmatrix aufgebaut,

$$\mathbf{A}_{PQR} = [\mathbf{i} \ \mathbf{j} \ \mathbf{k}] = \begin{bmatrix} x_i & x_j & x_k \\ y_i & y_j & y_k \\ z_i & z_j & z_k \end{bmatrix}. \quad (\text{B.4})$$

Man kann die Gleichungen (B.1), (B.2) und (B.3) entweder in der expliziten Form betrachten, indem man (B.1) in (B.2) und (B.1) mit (B.2) in (B.3) einsetzt, oder man kann direkt die implizite Form verwenden.

### Lageproblem

Die implizite Darstellung der Gleichungen entsteht, wenn man die Gleichungen (B.1), (B.2) und (B.3) in die Gleichung der Drehmatrix (B.4) einsetzt. Durch den Vergleich von neun Elementen der Drehmatrix bekommt man neun implizite Zwangsbedingungen,

$$\phi_1 := x_i - y_j z_k + z_j y_k = 0, \quad (\text{B.5a})$$

$$\phi_2 := y_i - z_j x_k + x_j z_k = 0, \quad (\text{B.5b})$$

$$\phi_3 := z_i - x_j y_k + y_j x_k = 0, \quad (\text{B.5c})$$

$$\phi_4 := x_j - [y_k(z_R - z_P) - z_k(y_R - y_P)]/|\vec{j}| = 0, \quad (\text{B.5d})$$

$$\phi_5 := y_j - [z_k(x_R - x_P) - x_k(z_R - z_P)]/|\vec{j}| = 0, \quad (\text{B.5e})$$

$$\phi_6 := z_j - [x_k(y_R - y_P) - y_k(x_R - x_P)]/|\vec{j}| = 0, \quad (\text{B.5f})$$

$$\phi_7 := x_k - (x_Q - x_P)/|\mathbf{r}_{PQ}| = 0, \quad (\text{B.5g})$$

$$\phi_8 := y_k - (y_Q - y_P)/|\mathbf{r}_{PQ}| = 0, \quad (\text{B.5h})$$

$$\phi_9 := z_k - (z_Q - z_P)/|\mathbf{r}_{PQ}| = 0. \quad (\text{B.5i})$$

In diesen Gleichungen treten neun unbekannte Drehkoordinaten

$$\mathbf{z}_{aD} = [x_i \ y_i \ z_i \ x_j \ \dots \ z_k] \quad (\text{B.6})$$

und neun bekannte Koordinaten, nämlich die Koordinaten von  $P$ ,  $Q$  und  $R$ ,

$$\mathbf{z}_{ul} = [x_P \ y_P \ z_P \ x_Q \ \dots \ z_R]$$

auf. Wegen der Verwendung der impliziten Zwangsbedingungen entstehen anschauliche, einfach zu interpretierende Gleichungen. Der Nachteil der impliziten Zwangsbedingungen in der Form

$$\phi(\mathbf{z}_{aD}, \mathbf{z}_{ul}) = \mathbf{0} \quad (\text{B.7})$$

ist, dass der Aufwand zur Lösung der Gleichungen hoch und mit numerischen Problemen behaftet ist.

### Geschwindigkeitsproblem

Die erste Ableitung der Einheitsvektoren wird durch die Ableitung von (B.5) gewonnen. Die Zwangsbedingungen auf der Geschwindigkeitsebene sind,

$$\Phi \dot{\mathbf{p}} = \Phi_{\mathbf{z}_{aD}} \dot{\mathbf{z}}_{aD} + \Phi_{\mathbf{z}_{ul}} \dot{\mathbf{z}}_{ul} = \mathbf{0}.$$

Dabei wird die Verteilung des Lagevektors  $\mathbf{p} = [\mathbf{z}_{aD} \ \mathbf{z}_{ul}]^T$  in Betracht gezogen. Die Jacobimatrix ergibt,

$$\Phi = \begin{bmatrix} \mathbf{E} & \Phi_{ij} & \Phi_{ik} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{E} & \Phi_{jk} & \Phi_{jp} & \mathbf{0} & \Phi_{jr} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{E} & \Phi_{kp} & \Phi_{kq} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (\text{B.8})$$



mit

$$\Phi_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & -z_k & y_k \\ z_k & 0 & -x_k \\ -y_k & x_k & 0 \end{bmatrix},$$

$$\Phi_{ik} = \begin{bmatrix} 0 & z_j & -y_j \\ -z_j & 0 & x_j \\ y_j & -x_j & 0 \end{bmatrix},$$

$$\Phi_{jk} = \frac{1}{|\bar{\mathbf{j}}|} \begin{bmatrix} 0 & -(z_R - z_P) & y_R - y_P \\ z_R - z_P & 0 & -(x_R - x_P) \\ -(y_R - y_P) & x_R - x_P & 0 \end{bmatrix},$$

$$\Phi_{jp} = \frac{1}{|\bar{\mathbf{j}}|} \begin{bmatrix} 0 & -z_k & y_k \\ z_k & 0 & -x_k \\ -y_k & x_k & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{|\bar{\mathbf{j}}|} \Phi_{ij},$$

$$\Phi_{jr} = \frac{1}{|\bar{\mathbf{j}}|} \begin{bmatrix} 0 & z_k & -y_k \\ -z_k & 0 & x_k \\ y_k & -x_k & 0 \end{bmatrix} = -\Phi_{jp},$$

$$\Phi_{kp} = \frac{1}{|\mathbf{r}_{PQ}|} \mathbf{E}_3$$

und

$$\Phi_{kq} = -\Phi_{kp}.$$

Die skalaren Größen  $|\mathbf{r}_{PQ}|$  und  $|\bar{\mathbf{j}}|$  ändern sich mit der Zeit nicht, da alle drei Punkte  $P$ ,  $Q$  und  $R$  auf einem starren Körper liegen. Die ersten Ableitungen werden dann zusammengefasst zu

$$\dot{\mathbf{z}}_{aD} = -\Phi_{\mathbf{z}_{aD}}^T \Phi_{\mathbf{z}_{ul}} \dot{\mathbf{z}}_{ul} = \mathbf{J}_D \dot{\mathbf{z}}_{ul}. \quad (\text{B.9})$$

### Beschleunigungsproblem

Die zweiten Ableitungen der impliziten Zwangsbedingungen haben die Form,

$$\Phi_{\mathbf{z}_{aD}} \ddot{\mathbf{z}}_{aD} + \Phi_{\mathbf{z}_{ul}} \ddot{\mathbf{z}}_{ab} + \mathbf{c}_{BD} = \mathbf{0}.$$

Von Interesse ist nun der unbekannte Vektor  $\mathbf{c}_{BD}$ , für den gilt,

$$\mathbf{c}_{BD} = \dot{\Phi} \dot{\mathbf{z}}_a.$$

Wenn man die Ableitung der Jacobimatrix  $\Phi$  aus (B.8) in die obige Gleichung einsetzt, bekommt man,

$$\mathbf{c}_{BD} = \begin{bmatrix} 2(\dot{z}_j \dot{y}_k - \dot{y}_j \dot{z}_k) \\ 2(\dot{x}_j \dot{z}_k - \dot{z}_j \dot{x}_k) \\ 2(\dot{y}_j \dot{x}_k - \dot{x}_j \dot{y}_k) \\ 2[(\dot{y}_R - \dot{y}_P)\dot{z}_k - (\dot{z}_R - \dot{z}_P)\dot{y}_k]/|\dot{\mathbf{j}}| \\ 2[(\dot{z}_R - \dot{z}_P)\dot{x}_k - (\dot{x}_R - \dot{x}_P)\dot{z}_k]/|\dot{\mathbf{j}}| \\ 2[(\dot{x}_R - \dot{x}_P)\dot{y}_k - (\dot{y}_R - \dot{y}_P)\dot{x}_k]/|\dot{\mathbf{j}}| \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Die zweite Ableitung der Einheitsvektoren ist hiermit,

$$\ddot{\mathbf{z}}_{aD} = -\Phi_{\mathbf{z}_{aD}}^T \Phi_{\mathbf{z}_{ul}} \ddot{\mathbf{z}}_{ab} - \Phi_{\mathbf{z}_{aD}}^T \mathbf{c}_{BD} = \mathbf{J}_D \ddot{\mathbf{z}}_{ab} + \overline{\ddot{\mathbf{z}}_{aD}}. \quad (\text{B.10})$$

Die Einheitsvektoren und ihre ersten und zweiten Ableitungen werden für die bekannte Lage, Geschwindigkeit und Beschleunigung der Eingangspunkte  $P$ ,  $Q$  und  $R$  mit den Gleichungen (B.7), (B.9) und (B.10) eindeutig bestimmt.

# Anhang C

## Eingabeparameter und Ergebnisse der Raumlanker-Radaufhängung

### Eingabeparameter

Alle Abmessungen werden im aufbaufesten Koordinatensystem angegeben.

**Anordnung der Punkte [m]** (Abbildung C.1)

Punkt	$x$	$y$	$z$
$B_1$	-0,064	0,413	0,327
$B_2$	-0,303	0,432	0,295
$B_3$	-0,093	0,366	0,004
$B_4$	-0,236	0,388	-0,109
$B_5$	0,2115	0,3845	-0,100
$D_B$	0,090	0,525	0,170
$C_1$	-0,064	0,636	0,345
$C_2$	-0,117	0,636	0,338
$C_3$	-0,188	0,647	-0,023
$C_4$	-0,005	0,737	-0,130
$C_5$	0,0025	0,737	-0,134
$D_C$	0,0025	0,737	-0,134
$M$	0,0	0,786	0,0
$P$	0,0	0,686	-0,001

### Radstellung

Radsturzwinkel	0,573°
Vorspurwinkel	0,0°

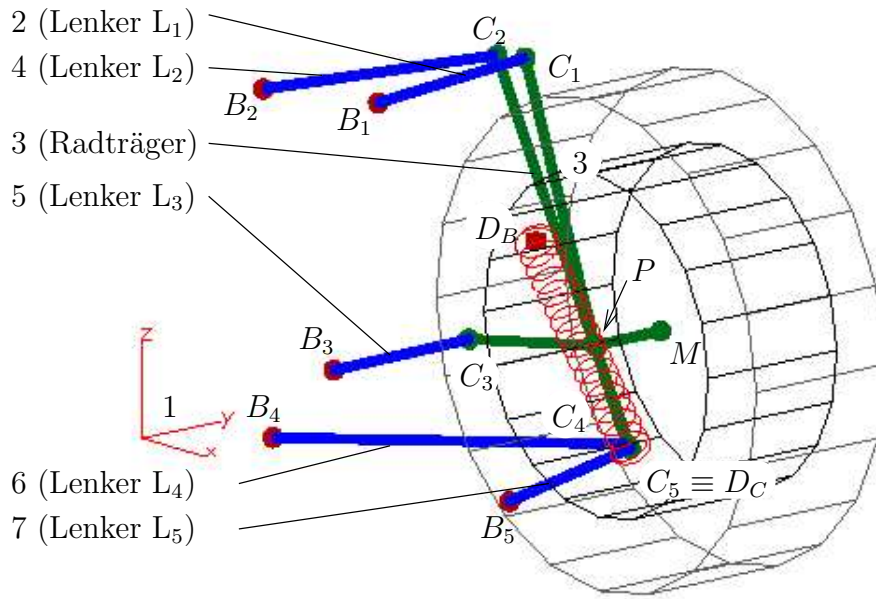


Abbildung C.1: Datenpunkte der Raumenker-Radaufhängung

**Massengrößen der Lenker**

Lenker	L <sub>1</sub>	L <sub>2</sub>	L <sub>3</sub>	L <sub>4</sub>	L <sub>5</sub>
Masse $m$ [kg]	2,0	2,0	4,0	1,0	3,0
$I_{\text{Längsachse}}$ [kgm <sup>2</sup> ]	$8,10 \cdot 10^{-5}$	$8,10 \cdot 10^{-5}$	$1,62 \cdot 10^{-4}$	$4,05 \cdot 10^{-5}$	$1,22 \cdot 10^{-4}$
$I_{\text{Querachse}}$ [kgm <sup>2</sup> ]	$8,38 \cdot 10^{-3}$	$1,31 \cdot 10^{-2}$	$2,97 \cdot 10^{-2}$	$1,47 \cdot 10^{-2}$	$4,23 \cdot 10^{-2}$
Die Schwerpunkte liegen jeweils in der Mitte des Lenkers auf der Längsachse					

**Massengrößen anderer Körper**

	<sup>1</sup> / <sub>4</sub> Aufbau		Radträger		Rad
	Original	Ersatz	Original	Ersatz	
Masse $m$ [kg]	448,0	454,0	15,0	21,0	12,0
$I_{xx}$ [kgm <sup>2</sup> ]	–	–	0,3	0,828	0,74
$I_{yy}$ [kgm <sup>2</sup> ]	–	–	0,2	0,488	1,46
$I_{zz}$ [kgm <sup>2</sup> ]	–	–	0,2	0,515	0,74
$I_{xy}$ [kgm <sup>2</sup> ]	–	–	0,010	-0,020	–
$I_{xz}$ [kgm <sup>2</sup> ]	–	–	0,015	0,035	–
$I_{yz}$ [kgm <sup>2</sup> ]	–	–	0,050	0,123	–
$x_{S_3}$ [m]			-0,103	-0,100	
$y_{S_3}$ [m]			0,463	0,523	
$z_{S_3}$ [m]			0,087	0,080	

Der Trägheitstensor des Radträgers wird im Koordinatensystem  $C$  angegeben, das parallel zum aufbaufesten Koordinatensystem ist und im Massenmittelpunkt  $S_3$  (Koordinaten  $x_{S_3}$ ,  $y_{S_3}$ ,  $z_{S_3}$ ) liegt. Wegen der Rotationssymmetrie unterscheiden sich am

Rad nur die Trägheitsmomente bezüglich der Drehachse ( $I_{yy}$ ) und senkrecht dazu ( $I_{xx}$ ,  $I_{zz}$ ).

### Kraftelemente

	Federung	Reifen
Steifigkeit $c$ [N/m]	14000	200000
Dämpfung $d$ [Ns/m]	1400	–
Reifenradius $r_0$ [m]	–	0,3

**Eigenfrequenzen** des Modells sind  $f_1 = 0,70$  Hz und  $f_2 = 13,44$  Hz.

**Änderungen** des Modells im Vergleich zum Originalmodell [38]:

- Die Trägheitsmomente der Lenker werden berücksichtigt.
- Die Federung wird am Radträger angebracht und nicht am Lenker  $L_5$ .
- Die Fahrzeugaufbau hat eigene Massengrößen.

## Einige Simulationsergebnisse

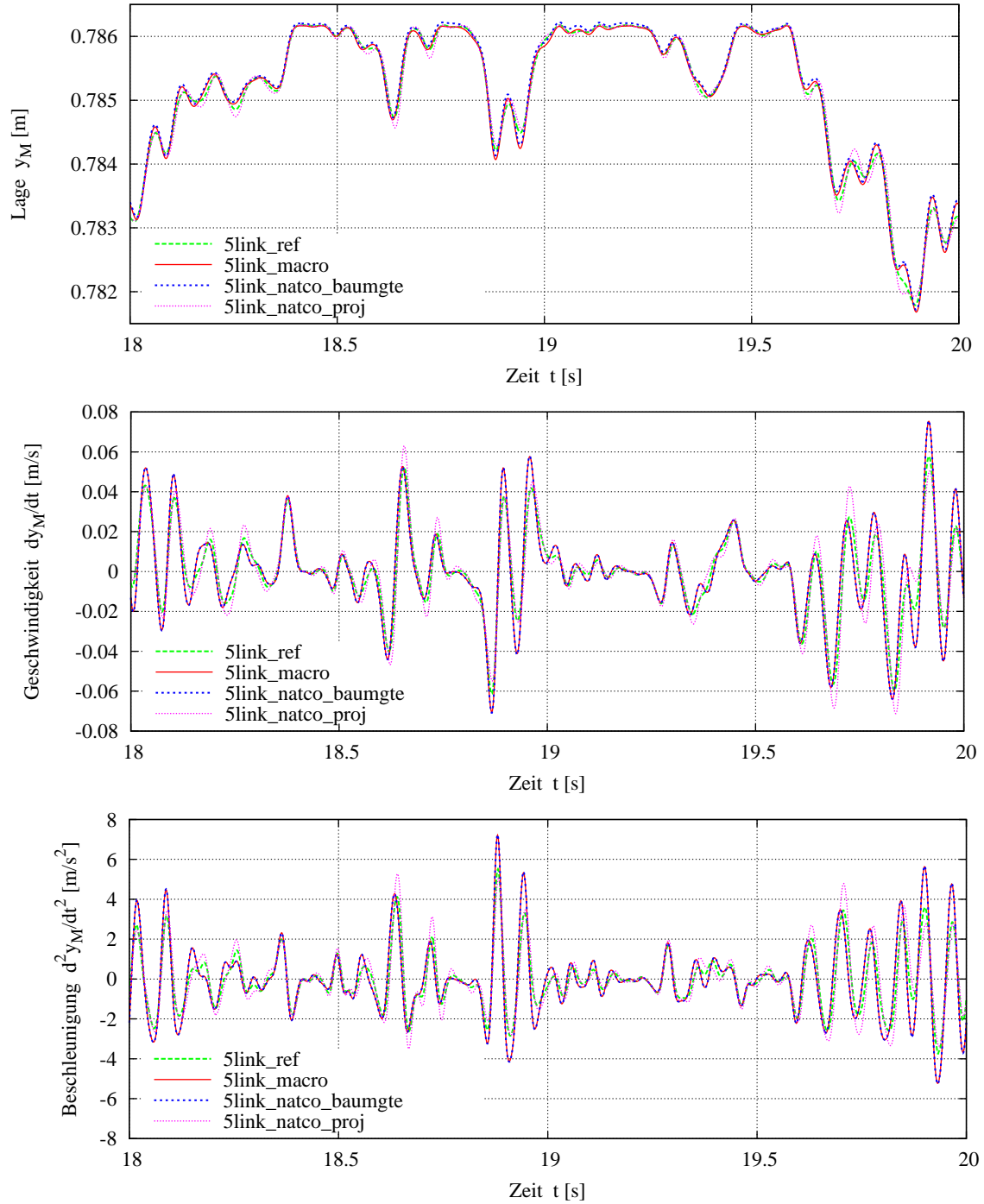


Abbildung C.2: Zweites Simulationsszenario – Lage, Geschwindigkeit und Beschleunigung des Radmittelpunkts  $M$  in Querrichtung bei der Baumgarte-Stabilisierung (Modellvarianten  $5link\_natco\_baumgte$  und  $5link\_macro$ ,  $\alpha_B = 5$ ) und bei der Stabilisierung mittels Projektion (Modellvariante  $5link\_natco\_proj$ ); nur die letzte Periode dargestellt

# Anhang D

## Eingabeparameter und Ergebnisse des Gesamtfahrzeugmodells

### Eingabeparameter

#### Gesamtfahrzeug

Größe	Wert
Masse $m$ [kg]	1401,2
$I_{xx}$ (Längsachse) [kgm <sup>2</sup> ]	436,2
$I_{yy}$ (Querachse) [kgm <sup>2</sup> ]	2877,0
$I_{zz}$ (Hochachse) [kgm <sup>2</sup> ]	3032,4
Radstand $l_R$ [m]	2,52
Vorspurwinkel vorne/hinten	0° / 0°20'
Radsturzwinkel vorne/hinten	−0°30' / −1°27'

### Einige Simulationsergebnisse

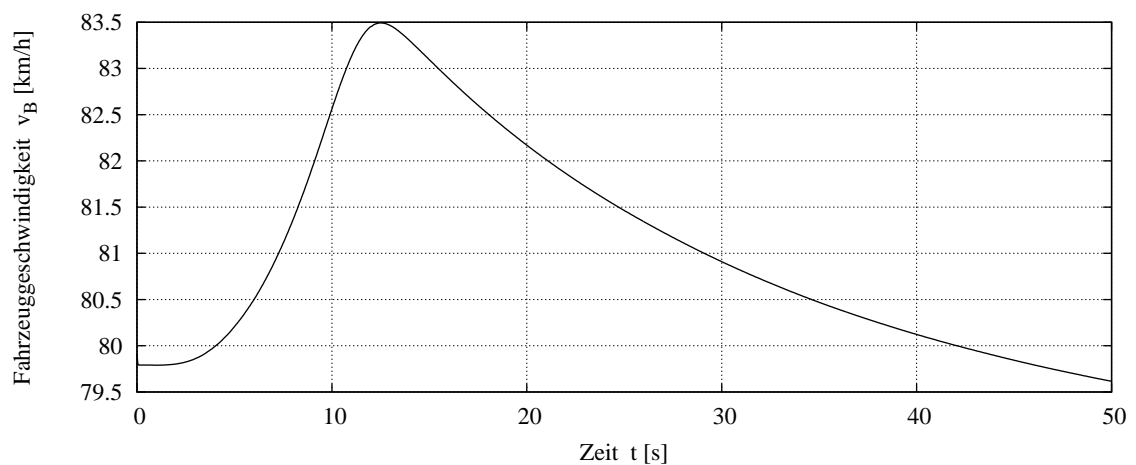


Abbildung D.1: Erstes Simulationsszenario – Fahrzeuggeschwindigkeit

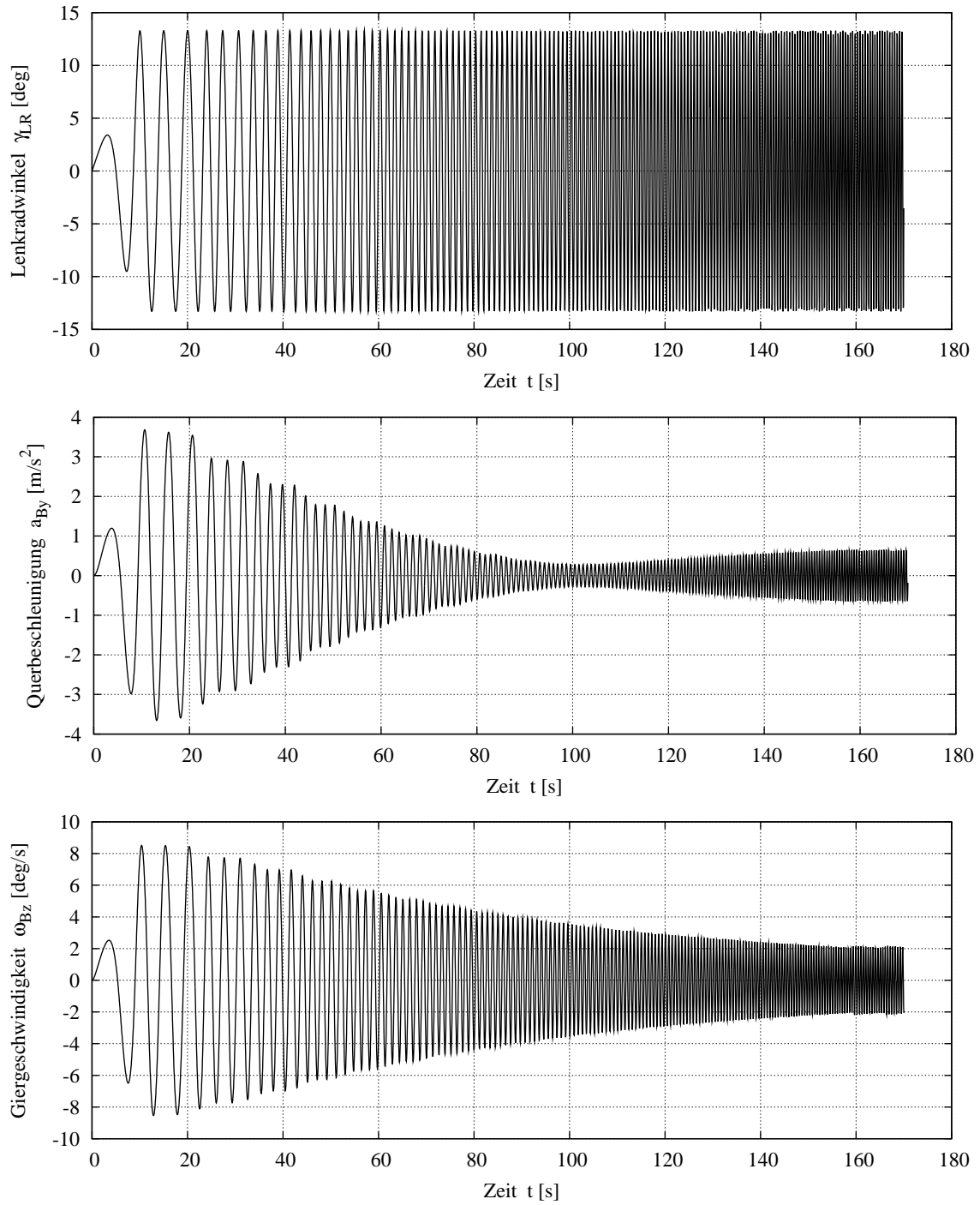


Abbildung D.2: Zweites Simulationsszenario – Zeitverläufe vom Lenkradwinkel  $\gamma_{LR}$  (oben), Querbeschleunigung  $a_{By}$  (mitte) und Giergeschwindigkeit  $\omega_{Bz}$  (unten)



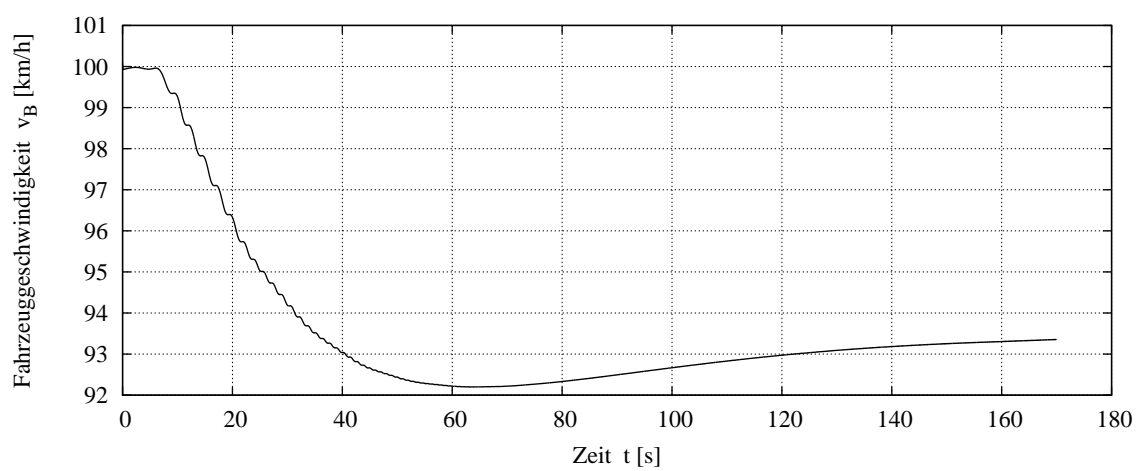


Abbildung D.3: Zweites Simulationsszenario – Fahrzeuggeschwindigkeit



# Literaturverzeichnis

- [1] Acevedo, M. und Celigüeta, J.T.: *Real Time Dynamic Simulation of Passenger Cars*. In: *Proc. Mechatronics and Supercomputing Applications in the Transportation I*, S. 559–566, 1994.
- [2] Allen, R. W., Rosenthal, T. J., Aponso, B. L., Klyde, D. H., Anderson, F. G. und Christos, J. P.: *A Low Cost PC Based Driving Simulator for Prototyping and Hardware-In-The-Loop Applications*. SAE Paper 980222, 1998.
- [3] Arnold, M.: *Numerische Grundlagen von Simulationswerkzeugen der Fahrzeugsystemdynamik*. Seminar TV 1.03, Carl-Cranz-Gesellschaft, Oberpfaffenhofen, 2002.
- [4] Arnold, M., Rulka, W. und Tobolář, J.: *Echtzeitfähige Simulation von Mehrkörpersystemen: Herausforderungen an Modellbildung und Zeitintegrationsverfahren*. 6. Workshop über Deskriptorsysteme, Paderborn, März 2003.
- [5] Bae, D. S. und Haug, E. J.: *A Recursive Formulation for Constrained Mechanical System Dynamics: Part I. Open Loop Systems*. *Mechanics of Structures and Machines*, 15(3):359–382, 1987–88.
- [6] Bae, D. S. und Haug, E. J.: *A Recursive Formulation for Constrained Mechanical System Dynamics: Part II. Closed Loop Systems*. *Mechanics of Structures and Machines*, 15(4):481–506, 1987–88.
- [7] Bae, D. S., Lee, J. K., Cho, H. J. und Yae, H.: *An explicit integration method for realtime simulation of multibody vehicle models*. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Bd. 187, S. 337–350, 2000.
- [8] Baumann, G. und Wiedemann, J.: *Ein Fahrsimulator für elektronisch gesteuerte Nutzfahrzeuggetriebe*. In: *3. Stuttgarter Symp. Kraftfahrwesen und Verbrennungsmotoren*, 1999. Renningen-Malmsheim: Expert-Verlag.
- [9] Baumgarte, J.: *Stabilisation of constraints and integrals of motion in dynamical systems*. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1:1–16, 1972.
- [10] Brandl, H., Johanni, R. und Otter, M.: *A very efficient Algorithm for the Simulation of Robots and similar Multibody Systems without Inversion of the Mass Matrix*. In: *IFAC/IFIP/IMACS Symposium on Theory of Robots*, 1986.
- [11] Bremer, H. und Pfeiffer, F.: *Elastische Mehrkörpersysteme*. Teubner Verlag, Stuttgart, 1992.

- [12] Brennan, K., Campbell, S. und Petzold, L.: *Numerical Solution of Initial-Value Problems in Differential-Algebraic Equations*. SIAM, Philadelphia, 1996.
- [13] Bronstein, I. N. und Semendjajew, K. A.: *Taschenbuch der Mathematik*. Verlag Harri Deutsch, Thun, Frankfurt/Main, 23. Aufl., 1987.
- [14] Brüning, H.-C.: *Virtuelle Produktentwicklung in der Pkw-Aufbau-Entwicklung*. In: 5. Automobiltechnische Konferenz: Der virtuelle Produktentstehungsprozess im Automobil- und Motorenbau, 2001.
- [15] Choi, G. J., Yoo, Y. M., Lee, K. P. und Yoon, Y. S.: *A real-time multibody vehicle dynamic analysis method using suspension composite joints*. International Journal of Vehicle Design, 24(2/3):259–273, 2000.
- [16] Choi, G. J., Yoo, Y. M., Lee, K. P. und Yoon, Y. S.: *Vehicle Modeling Methods for Real-Time Dynamic Simulation Using Suspension Composite Joints*. Mechanics of Structures and Machines, 28(4):303–321, 2000.
- [17] Dragon, L.: *FADYS, ein komplexes Fahrzeugdynamikmodell für echtzeitfähige Hardware-in-the-Loop Anwendungen*. VDI Berichte Nr. 1283, S. 117–129, 1996.
- [18] Eich-Soellner, E. und Führer, C.: *Numerical Methods in Multibody Dynamics*. Teubner Verlag, Stuttgart, 1998.
- [19] Eichberger, A.: *Simulation von Mehrkörpersystemen auf parallelen Rechnerarchitekturen*. Nr. 332 in *Fortschr.-Ber. VDI Reihe 8*. VDI Verlag, Düsseldorf, 1993. Dissertation.
- [20] Elmqvist, H., Mattsson, S. E., Olsson, H., Andreasson, J., Otter, M., Schweiger, C. und Brück, D.: *Real-time Simulation of Detailed Automotive Models*. In: *Proceedings of the 3<sup>rd</sup> International Modelica Conference*, S. 29–38, 2003.
- [21] Freeman, J. S., Watson, G., Papelis, Y. E., Lin, T. C., Tayyab, A., Romano, R. A. und Kuhl, J. G.: *The Iowa Driving Simulator: An Implementation and Application Overview*. SAE Paper 950174, 1994.
- [22] García de Jalón, J. und Bayo, E.: *Kinematic and Dynamic Simulation of Multibody Systems: The Real-Time Challenge*. Springer-Verlag New York, 1994.
- [23] García de Jalón, J., Unda, J. und Avello, A.: *Natural Coordinates for the Computer Analysis of Multibody Systems*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 56:309–327, 1986.
- [24] Gipser, M.: *Echzeitfähige MKS-Programme: optimierte Numerik statt komplizierter Mechanik*. Seminar TV 1.03, Carl-Cranz-Gesellschaft, Oberpfaffenhofen, 2003.
- [25] Hrubec, F. und Kovanda, J.: *Elektronické systémy řízení podvozků osobních automobilů pro zvýšení aktivní bezpečnosti (Elektronische Regelsysteme der Fahrwerke von Personenkraftwagen für Verbesserung der aktiven Sicherheit)*. In: *Slovak Rubber Conference*, Bd. 1, 2002.

- [26] Kelley, C.: *Iterative Methods for Linear and Nonlinear Equations*. SIAM, 1995.
- [27] Keßler, B.: *Bewegungsgleichungen für Echtzeitanwendungen in der Fahrzeugdynamik*. Dissertation, Institut B für Mechanik, Universität Stuttgart, 1989.
- [28] Kim, S.-S.: *A Subsystem Synthesis Method for an Efficient Vehicle Multibody Dynamics*. In: *Advances in Computational Multibody Dynamics*, 1999.
- [29] Kim, S.-S. und Oh, Y.-S.: *A Real-Time Multibody Vehicle Dynamics Model Using a Subsystem Synthesis Method*. In: *ASME 2001, Proceedings of DETC'01*, 2001.
- [30] Kim, S.-S. und Song, K.-J.: *Comparative study on multibody dynamics formulations based on subsystem synthesis method for real-time vehicle dynamics*. In: *EC-COMAS Thematic Conference on Advances in Computational Multibody Dynamics 2003*, 2003.
- [31] Kim, S.-S., Won, M., Sohn, B., Song, K. und Jung, S.: *The development of a real-time multibody vehicle dynamics and control model for a low cost virtual reality vehicle simulator: An application to Adaptive Cruise Control*. In: *NATO ASI Workshop on Virtual Nonlinear Multibody Systems*, Bd. II, S. 96–101, Prag, 2002.
- [32] Knapczyk, J. und Dzierżek, S.: *Elastokinematic Analysis of Five-rod Suspension with Flexible Joints, Including Effects of Shock Absorbers*. In: *The Dynamics of Vehicles on Roads and on Tracks*, Bd. 28, S. 270–279. Swets & Zeitlinger, 1998. Supplement to Vehicle System Dynamics.
- [33] Kokotovic, P.: *Singular perturbation techniques in control theory*. In: *Singular Perturbation and Asymptotic Analysis in Control Systems*, S. 1–55. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1987.
- [34] Kortüm, W. und Arnold, M.: *Integrierte dynamische Simulation - ein Beitrag zur virtuellen Produktentwicklung*. In: *5. Automobiltechnische Konferenz: Der virtuelle Produktentstehungsprozess im Automobil- und Motorenbau*, 2001.
- [35] Kortüm, W. und Lugner, P.: *Systemdynamik und Regelung von Fahrzeugen, Einführung und Beispiele*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1994.
- [36] Kortüm, W., Rulka, W. und Eichberger, A.: *Recent Enhancements of SIMPACK and Vehicle Applications*. In: *EUROMECH 320: Multibody Systems: Advanced Algorithms and Software*, 1994.
- [37] Kortüm, W., Rulka, W. und Spieck, M.: *Simulation of Mechatronic Vehicles with SIMPACK*. In: *MOSIS 97*, 1997.
- [38] Kortüm, W. und Sharp, R.: *Multibody computer codes in vehicle system dynamics*, Bd. 22. Swets & Zeitlinger, 1993. Supplement to Vehicle System Dynamics.
- [39] Kortüm, W., Trautenberg, W., Kovanda, J. und Rulka, W.: *SIMPACK as a Tool for Automotive Engineering*. In: *AVEC '98*, 1998.

- [40] Kovanda, J.: *Řízené mechanické systémy a jejich vliv na jízdní vlastnosti vozidel (Ge-regelte mechanische Systeme und deren Einfluss auf Fahrverhalten der Fahrzeuge)*. AutoEXPERT, 7(5):38–40, 2002.
- [41] Krüger, W., Deutrich, K. und Hablowetz, T.: *SIMPACK - Anwendungen eines mul-tidisziplinären Entwurfswerkzeugs für die Luft- und Raumfahrt in Industrie und For-schung*. In: *Deutscher Luft- und Raumfahrtkongress 2000*, Bd. I, 2000.
- [42] Lee, W.-S. und Kim, S.-S.: *Real-Time Vehicle Dynamic Simulation*. In: *AVEC '94*, 1994.
- [43] Lohmann, B.: *Ordnungsreduktion und Dominanzanalyse nichtlinearer Systeme*. Au-tomatisierungstechnik, 42:466–474, 1994.
- [44] Matschinsky, W.: *Radführungen der Straßenfahrzeuge: Kinematik, Elasto-Kinematik und Konstruktion*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2. Aufl., 1998.
- [45] Neubeck, J. und Baumann, G.: *Generierung echtzeitfähiger SIMPACK Modelle und automatische Implementierung auf Echtzeitsystemen für kraftfahrzeugtechnische An-wendungen*. In: *SIMPACK User-Meeting – Konstanz*, 2000.
- [46] Paul, B.: *Analytical Dynamics of Mechanisms - A Computer Oriented Overview*. Mechanism and Machine Theory, 10:481–507, 1975.
- [47] Rentrop, P., Strehmel, K. und Weiner, R.: *Ein Überblick über Einschrittverfahren zur numerischen Integration in der technischen Simulation*. Bericht 95–12, Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg, FB Mathematik und Informatik, 1995.
- [48] Rieth, P. E., Eckert, A. und Drumm, S. A.: *Global Chassis Control – Das Chassis im Reglerverbund*. Tagung Fahrwerktechnik, Haus der Technik e.V., Essen, Mai 2001. Tagung Nr. E–H030–05–074–1.
- [49] Rill, G.: *Simulation von Kraftfahrzeugen*. Vieweg Verlag, Braunschweig/Wiesbaden, 1994.
- [50] Rulka, W.: *Bewegungsgleichungen für hybride mechanische Systeme mit freiheits-gradproportionalem Rechenaufwand*. Intern. Ber. IB 515-86/12, DFVLR Oberpfaf-fenhofen, 1986.
- [51] Rulka, W.: *Effiziente Simulation der Bewegungsgleichungen mechatronischer Systeme für industrielle Anwendungen*. Dissertation, TU-Wien, 1998. Auch: Intern. Ber. IB 532–01–06, DLR Oberpfaffenhofen, Institut für Aeroelastik.
- [52] Rulka, W. und Eichberger, A.: *Prozesssichere Modellreduzierung: Der Schlüssel zur Echtzeit und effizienten MKS-Simulation in der Fahrzeugdynamik*. In: *MKS-Simulation in der Automobilindustrie*, 2002. Magna Steyr Marketing Communicati-ons, Graz.
- [53] Rulka, W. und Pankiewicz, E.: *MBS approach to generate equations of motions for HIL-simulations in vehicle dynamics*. In: *ECCOMAS Thematic Conference on Advances in Computational Multibody Dynamics 2003*, 2003.

- [54] Sailer, U.: *Nutzfahrzeug-Echtzeitsimulation auf Parallelrechnern mit Hardware-in-the-Loop*, Bd. 1. expert-Verlag Renningen-Malmsheim, 1997. Schriftenreihe des Instituts für Verbrennungsmotoren und Kraftfahrwesen der Universität Stuttgart.
- [55] Sayers, M. W.: *Vehicle Models for RTS Applications*. Vehicle System Dynamics, 32(4/5):421–438, 1999.
- [56] Schiehlen, W.: *Technische Dynamik*. Teubner Verlag, Stuttgart, 1986.
- [57] Schiehlen, W.: *Multibody Systems Handbook*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1990.
- [58] Schiehlen, W., Rügauer, A. und Schirle, T.: *Force Coupling Versus Differential Algebraic Description of Constrained Multibody Systems*. Multibody System Dynamics, 4(4):317–340, 2000.
- [59] Schupp, G. und Jaschinski, A.: *Virtual Prototyping: the future way of designing railway vehicles*. International Journal of Vehicle Design, 22(1/2):93–115, 1999.
- [60] Seibert, T. und Rill, G.: *Fahrkomfortberechnungen unter Einbeziehung der Motorschwingungen*. VDI Berichte Nr. 1411, S. 705–717, 1998.
- [61] Slavík, J., Stejskal, V. und Zeman, V.: *Základy dynamiky strojů (Grundlagen der Maschinendynamik)*. Vydavatelství ČVUT, Prag, 1997.
- [62] Sohn, J.-H., Yoo, W.-S., Kim, K.-S. und Lee, J.-N.: *Force element formulation of bushed massless links for numerical efficiency*. Mechanics of Structures and Machines, 29(4):477–497, 2001.
- [63] Stejskal, V. und Valášek, M.: *Kinematics and dynamics of machinery*. Marcel Dekker, Inc., 1996.
- [64] Suescun, A., González, J., Ausejo, S. und Celigüeta, J.T.: *Co-simulation of complete vehicle models with real-time performance*. In: *Co-Simulation for Mechatronic Systems*, S. 43–56. DLR Oberpfaffenhofen, IB 532–2001–10, 2001.
- [65] Tobolář, J.: *The virtual axle – a simplified vehicle suspension model for real-time applications*. In: *Computational mechanics 2002*, Bd. II, S. 461–468, University of West Bohemia in Pilsen, Nečtiny, 2002.
- [66] Tobolář, J.: *Die virtuelle Radaufhängung - ein vereinfachtes Modell einer Radaufhängung zur Echtzeitsimulation*. Intern. Ber. IB 532–2003–01, DLR Oberpfaffenhofen, Institut für Aeroelastik, 2003.
- [67] Wehage, R. A. und Haug, E. J.: *Generalized Coordinate Partitioning for Dimension Reduction in Analysis of Constrained Mechanical Systems*. ASME Journal of Mechanical Design, 104:247–255, 1982.
- [68] Woernle, C.: *Ein Verfahren zur behandlung von kinematischen Schleifen und zur Rückwärtstransformation bei Industrierobotern*. ZAMM, 67:T 166–T 168, 1987.

- [69] Zomotor, A.: *Fahrwerktechnik: Fahrverhalten*. Voegel Buchverlag Würzburg, 1. Aufl., 1987.
- [70] *ISO 7401: Road vehicles – Lateral transient response test methods – Open-loop test methods*, 2003.
- [71] *SIMPACK News*. Intec GmbH, Weßling, 2004.
- [72] *SIMPACK User Manual, SIMDOC 8.600*. Intec GmbH, Weßling, 2001.
- [73] *White Paper LabCar: Hardware-in-the-Loop Testsysteme für Steuergeräte*. ETAS GmbH & Co.KG, Stuttgart, 1999.